Б.А.КОРДЕМСКИЙ

УВЛЕЧЬ ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКОЙ

$\ln \sin 3x$

Б. А. КОРДЕМСКИЙ

УВЛЕЧЬ ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКОЙ

(материал для классных и внеклассных занятий)

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1981

ББК 74.262
К66

Рецензенты: методисты *К. И. Шалимова, Т. Л. Сытина*, учитель математики *Т. К. Шабашов*

Кордемский Б. А.

К66 Увлечь школьников математикой: (Материал для клас. и внеклас. занятий). М.: Просвещение, 1981. — 112 с., ил.

Эта книга-альманах — своеобразное пособие, содержащее вспомогательные материалы для воспитания увлеченности математикой.

Автором подобраны интересные и ценные для учителя математики размышления поэтов, писателей, ученых, приведены оригинальные занимательные задачи-новеллы.

Использование учителем математики подходящих к теме урока поэтических ассоциаций и литературных метафор повышает эмоциональность урока, содействует увеличению вклада математики в общекультурное развитие учащихся.

К $\frac{60501 - 880}{103(03) - 81}$ 124 — 81 4306010400 ББК 74.262 51

ПРЕДИСЛОВИЕ

> Человек не может понимать окружающий его мир только логикой мозга, он должен ощутить его логикой сердца, т. е. эмоцией.
>
> *С. В. Образцов*

Могущество и красота математической мысли — в предельной четкости ее логики, изяществе ее конструкций, искусном построении абстракций. И вместе с тем математические высказывания — определения, теоремы, формулы — сопоставимы с поэзией по силе воздействия на воображение, по целенаправленной плотности языка. Истинный поэт, да и прозаик, и математик, и педагог одинаково озабочены отбором слов и фраз, наиболее адекватно выражающих мысль.

Посредством гармонии ритма точных слов, образов и рифмы стихотворения обретают эмоциональность, звучность, красоту. А ритм, гармония и даже стиль произведения подвластны математике. И если для математиков вопрос о природе и сущности связей между языками математики и поэзии — предмет исследований, то для некоторых поэтов это интуитивная опора творчества. Вот их признания.

Известный польский поэт Юлиан Тувим в поэме «Цветы Польши» пишет:

Так бури снов и бури бунта,
Так буйства красок, звуков, рифм
Смиряет циркуль, логарифм
И дисциплина контрапункта.

Классик венгерской поэзии Лайош Кашшак в стихотворении «Вводные строки к одной книге» признается:

Если б я родился музыкантом,
я бы стремился
перебороть шумы мира
с помощью стройных звуков.
Если б я родился архитектором,
я бы строил людям
не квартиры, а домашние очаги.
Я одарил бы их
светом, цветом и тишиной.
Но поскольку я поэт,
я хотел бы так же четко и ясно
говорить на языке слов,
как математики
говорят на языке чисел.

(Перевод с венгерского Ю. Гусева.)

Это прекрасное стихотворение легко и с пользой впишется в соответствующее его теме мероприятие по воспитанию культуры речи, в частности математической.

Имея в виду, что истинный поэт должен обладать такими «математическими» качествами, как точность и ясность восприятия и выражения мыслей, известный американский писатель Эдгар По сказал: «Поэт тем талантливее, чем более математичен его дар».

Не менее определенны и весьма любопытны размышления современного литовского поэта Эдуардаса Межелайтиса:

Река, несомненно, создание поэтическое,
Но любит математическую определенность.

Реке недостаточно
Возвышенной поэтики.
К ней не подступишься
Без точных наук.
Приходится часто
Решать уравнения
Со множеством неизвестных.
В противном случае
Будешь плутать
В поэтической мгле,
Пить глазами
Ее красоту,
А пользы конкретной —
Ни капли.
Если конкретности хочешь,
Математику не отвергай.
А лучше всего попытайся
Создать некий синтез:
ПОЭТИКОМАТЕМАТИКУ,
Так сказать, синтез
Земли и неба.
Иначе — запомни это —
В поэтической мгле останешься.

(Отрывок из «Дневника рыболова». Перевод с литовского Л. Миль.)

А разве не сближает природу теоремы и стиха одно из «безусловных условий», образно и эмоционально сформулированное армянским поэтом, нашим современником? Его имя Паруйр Севак:

Зеленые мысли, зрелые мысли, —
Это еще не стих.
(Нет! Самородок духа,
Самоцвет волшебства,
Раскрытие вечное скобок,
Решение неразрешимого —
Вот что такое стих!)
Бездомные, безымянные,
Горбатые «почему»
Снуют везде; ты впусти его
В душу к себе, окрести его
Словом своим, и выйдет стих
Из горбатого «почему».

(Перевод с армянского
В. Микушевич.)

Не общее ли первоначало у теоремы и стиха: вдохновение и интуиция? Не едино ли предназначение: поиск истины, ответов на бесконечные «почему»?

Обсуждая тему «Искусство и познание», советский физик Е. Л. Фейнберг отмечает: «В то же время общность природы интуитивного суждения в искусстве и науке, общность природы вдохновения, необходимого для интуитивного постижения в науке и искусстве, делает искусство полем постижения широчайшего круга интуитивных истин и методом утверждения авторитета интуиции вообще. В этой своей роли искусство выступало на протяжении всей истории человечества» (Вопросы философии, 1976, № 7).

Осуществив выборку таких фрагментов из богатой россыпи литературно-художественных творений, опубликованных на русском языке, которые хотя бы в первом приближении можно отнести к жанру, условно названному Межелайтисом поэтикоматематикой, я стремился положить начало своеобразному дидактическому пособию, полезному для учителя математики и пригодному к практическому использованию. Еще Пифагор говорил: «Начало — половина целого».

В первой части книги воспроизведены стихи и проза по преимуществу в отрывках с соотнесением литературного материала математическим понятиям, образующим основную рубрикацию этой части. В какой-то мере выполненное соотнесение, разумеется, условно и субъективно. В наше пособие не включены, за немногим исключением, произведения аналогичного жанра, имеющиеся на страницах научно-популярных книг и книг по занимательной математике, широко известных учителям математики.

Не каждое стихотворение или отрывок прозы из представленных в этой книге обладает потенциалом непосредственной полезности при разработке учителем плана и формы проведения уроков математики. Но в общей совокупности они являются тем материалом, которого крайне недостает учителю в его трудоемкой работе по организации и проведению такого математического вечера («Огонька»), чтобы литературно-художественная часть его программы могла быть представлена стихами, ассоциативно близкими математическим темам вечера, почему и воспроизводится в книге полный текст некоторых стихотворений.

Возможно, что в отобранных для книги «опусах» какие-либо из предполагаемых ассоциативных связей между математикой, преподаваемой в школе, и поэзией кому-то покажутся зыбкими, натянутыми — ведь ощущения и восприятия такого рода во многом субъективны.

И все-таки, подобно тому как само педагогическое мастерство признается формой творчества на грани науки и искусства, так мало-помалу возникает и поэтикоматематика, но уже скорее в творческом взаимодействии трех дарований: математического, поэтического и педагогического.

Во второй части книги представлена подборка оригинальных занимательных задач и математических фактов, в которых собственная эстетика математики усилена формой (оболочкой) литературных эссе-миниатюр.

Легкий юмор фабулы, неожиданность ситуации или развязки, доставляемой решением задачи, стройность геометрической формы, изящество решения, под которым понимается сочетание простоты и оригинальности методов его получения, — вот основные элементы эстетики занимательных задач «на соображение».

Через занимательность проникает в сознание ученика сначала ощущение прекрасного, а затем, при последующем систематическом изучении математики, и понимание красоты ее методов.

Многие известные ученые — физики, математики, химики, биологи — не раз отмечали, что эстетический элемент и, более того, эстетический импульс нередко оказывал заметное влияние на ход их научных исследований. А разве освоение школьником математических методов не является творческим, исследовательским процессом? И работа учителя ведь тоже нескончаемые методические поиски и исследования! Значит, эстетический импульс способен возбуждать и методическую мысль учителя, и познавательный интерес у школьника.

Посредством данной книги автору и хотелось бы помочь учителю математики целенаправленно разворошить обширные владения двух муз: музы лирики — Эрато и музы эпоса — Каллиопы.

МЕТОДИЧЕСКАЯ ИНТРОДУКЦИЯ

> Логическая мысль отыщет себе поэтическое выражение, и, наоборот, поэзия выражения закрепит самую мысль.
>
> *К. Д. Ушинский*

Математика в своей сущности достаточно таинственна и романтична. В ореоле этих свойств ей следует остаться также и в качестве предмета изучения в школе. В преподавании этого предмета, разумеется, должен господствовать собственный язык математики, который, впрочем, и сам по себе полон скрытой гармонии. Но интеллектуальный и эстетический заряд школьного урока математики, его впечатляемость значительно повышаются, когда учитель не пренебрегает разнообразными приемами образно-эмоционального аккомпанемента, расцвечивающего прямую научную информацию.

Почему бы учителю на уроке математики, а также и при других формах общения с учащимися к месту и в меру не воспользоваться, например, стихотворной или художественно-прозаической цитатой, так сказать, «репликой в сторону», метафорой, изящной шуткой и остротой, занимательной задачей, игровыми элементами как средством возбуждения в сознании учащихся «чувствуемой мысли» (по образному выражению В. Маяковского). В самом деле:

Иная шутка, словцо бедовое
Мудрей, чем книжица стопудовая.
Ведь не таблицею умножения
Подчас является нам прозрение?

(Из стихотворения *Владимира Михановского* «Мечта».)

Такая форма проявления учителем математики педагогического мастерства — одно из эффективных средств возбуждения в учащихся увлеченности математикой. Более того, внутренняя культура, эрудиция учителя математики индуцируется на литературнохудожественный кругозор учащихся, содействуя тенденции к его расширению.

Осуществляется, пусть скромный, вклад учителя математики в нужную школе межпредметную совместность решения общей воспитательной задачи подъема духовной, и в частности гуманитарной, культуры учащихся.

Добиться от учащихся глубокого и осознанного овладения большим количеством математических понятий нелегко, придерживаясь все время академического стиля строгих определений. Дело в том, разъясняет известная писательница (профессор математики по основному роду занятий) И. Грекова, что «...живое содержание понятия, как правило, шире и богаче его сжатого словесного определения — ведь оно формируется не определением, а всем опытом общественной жизни и практической деятельности людей, всей системой ассоциаций, образов, аналогий, даже эмоций, связанных с данным предметом, явлением». Коротко эту систему она называет *ассоциативной базой понятия* (Знание — сила, 1979, № 8).

Математические теории, проблемы, методы сами по себе пока, к сожалению, еще недостаточно привлекают профессиональных художников слова. «Огромный материал, накопленный точными науками, ждет своего освоения в стихе», — говорится во вступительной статье к книге В. Брюсова «Стихотворения» (М., 1959). А пока лишь некоторые математические термины и понятия постепенно обретают литературно-ассоциативную базу. Рассмотрим несколько примеров с соответствующими комментариями.

1. Эмоциональный настрой к восприятию абстрактно-геометрического понятия *линия* образуется при чтении стихотворения Евгения Винокурова «Ода линии» (отрывок):

Я более скажу: и нет
На свете ничего важней,
Чем линия, — любой предмет
Предметом делается с ней...

Беру перо: вмиг создана
Корова росчерком одним.
Я славлю линию! Она
Живое делает живым...

2. *Синусоида* — график физических колебательных процессов. Не богаче ли, не глубже ли станет представление о синусоиде, если она еще и линия жизни нашей, как это представлено в стихотворении Евгения Долматовского:

Научись встречать беду не плача:
Горький миг — не зрелище для всех.
Знай: душа растет при неудачах
И слабеет, если скор успех.
Мудрость обретают в трудном споре.
Предначертан путь нелегкий твой
Синусоидой радости и горя,
А не вверх взмывающей кривой.

(Произнося «синусоидой» вместо «синусойдой», мы не так уж ощутимо отклонимся от ритма строки. — *Б. К.*)

3. Образно-эмоциональное восприятие понятия *проекция* создается четырьмя строчками из стихотворения Андрея Вознесенского:

Над пнем склонилась паутина,
в хрустальном зеркале храня
тончайшим срезом волосинным
все годовые кольца пня.

Действительно, найдите в лесу паутинку над пнем — и вы увидите вместе с поэтом: природой начерчены две проекции пня: его срез и паутина — повторение среза.

В развитии воображения и геометрического ви́дения поэзия — хороший союзник математики.

4. Стройность и совершенство понятия *интеграл*, наряду с внешней красотой соответствующего символа, пленили поэтессу Нину Альтовскую:

Белыми интегралами
Лебеди на пруду.

Дети в саду играют,
В нашем саду.

(Из стихотворения «В летнем саду».)

Поэт и врач Иоханнес Барбарус (настоящая фамилия Варес) — первый в советской Эстонии председатель Президиума Верховного Совета республики (умер в 1946 г.) — также обращается к математическим образам. В одном из стихотворений предреволюционного времени он говорит:

В ушах «Интернационал» — хорал.
Шкала настроений — непостоянна.
В моей груди мятежа интеграл.
Сердце — радуга, флейта Пана.

Интеграл в этом отрывке — образ скопления (суммы) мятежных предреволюционных устремлений.

Предельно выразительно и обобщенно у А. Блока в «Скифах» —

Мы очищаем место бою
Стальных машин, где дышит интеграл... —

«интеграл» символизирует математику, давшую жизнедействие («дыхание») машинам труда и войны. (Исследователи творчества А. Блока отмечают, что «Скифы» — это отклик поэта на действия Советского правительства, направленные к скорейшему прекращению империалистической войны 1914—1917 гг.)

5. Издавна известен прием мнемоники — придумывание стихотворных, легко запоминающихся фраз, озвучивающих формулы, правила, «отображающих» порядок расположения элементов

в структуре, шифрующих числовое значение важных констант. Так, по-видимому, на многих языках придуманы строфы, «синхронно» воспроизводящие цифры числа π, например:

3, 1 4 1 5 9
Вот и Миша и Анюта прибежали,
2 6 5 3 6
Пи узнать число они желали. ($\pi \approx 3{,}1415926536$)

Или короче:

3, 1 4 1 5 9
«это я знаю и помню прекрасно...»

В живой, «завлекательной» форме можно сказать учащимся и о двух замечательных рациональных приближениях числа π. Первое $\left(\frac{355}{113}\right)$ — древнейшее. Открыто знаменитым китайским астрономом Цю-Шунь-Ши в V веке до н. э. И только через 1000 лет оно было переоткрыто в Европе. А вот и мнемоническое правило для его восстановления в памяти. Напишем по два раза первые три нечетных числа: 1, 1, 3, 3, 5, 5. Из первых трех чисел делаем знаменатель, а из трех последних — числитель: $\frac{355}{113}$. И точность—до седьмого знака — более чем достаточная для практических целей.

Второе $\left(\frac{22}{7}\right)$ — также древнее, открыто Архимедом. Именно это приближение к числу π выбрал Магницкий для своего учебника. Запоминанию чисел 22 и 7 способствует рифмованная шутка:

Двадцать две совы скучали
На больших сухих суках.
Двадцать две совы мечтали
О семи больших мышах,

О мышах довольно юрких,
В аккуратных серых шкурках.
Слюнки капали с усов
У огромных серых сов.

(Другие примеры поэтических метафор, ассоциаций и образов для математических понятий, терминов, символов, формул, действий алгебры, линий, фигур, пригодные к использованию учителем, отнесены в последующие главы.)

Привлечение образности в речь учителя повышает эмоциональный настрой урока, создает теплоту взаимоотношений между учителем и учениками и доверительные условия для проведения впечатляющего урока с высоким интеллектуальным выходом.

Примеры. 1. Формула, уравнение или фраза, записанная символами, есть некоторое высказывание на языке математики. От ученика требуется грамотный, стилистически и логически, перевод на родной язык, словесное изложение, отражающее правильность понимания смысла математического высказывания. Соответствующее наставление уместно позаимствовать, скажем, у старорусской назидательной поэзии времен Сумарокова, хотя бы из его же «Епистолы»:

...Коль речи и слова поставишь без порядка,
И будет перевод твой некая загадка,
Которую никто не отгадает ввек;
То даром, что слова все точно ты нарек...

2. Рассмотрение практического приема отыскания приближенного значения диаметра материального шара по длине (C) нитки, обтягивающей шар по его большому кругу: $2R = \frac{C}{\pi}$, оживит цитата из стихотворения Сергея Михалкова «Если»:

...Где же солнце?
Что случилось?
Целый день течет вода.
На дворе такая сырость,
Что не выйдешь никуда.
...Если взять все эти капли
И соединить в одну,
А потом у этой капли
Ниткой смерить толщину, —
Будет каплища такая,
Что не снилось никому.
И не приснится никогда
В таком количестве вода.

3. Художественный образ стремления к нулю (бесконечно малой величины): шагреневая кожа (по Бальзаку) уменьшалась с каждым исполнением желаний. Или так, как сказал латышский поэт Янис Симбардис:

Шагреневая тает кожа!
Закаты меркнут, уходя...

4. Хорошая поэзия всегда умная поэзия. Она может и обязана создавать эмоциональные интерпретации положениям науки, т. е. проторять интуитивный путь постижения истины. Так, в стихотворениях С. Я. Маршака «Минута» и «Начало дня» заложены впечатляющие поэтические ассоциации с математической категорией непрерывности, содействующие не только уяснению сути этого понятия, но и ощущению его поэтичности:

Минута

Дана лишь минута любому из нас,
Но если минутой кончается час —
Двенадцатый час, открывающий год,
Который в другое столетье ведет, —
Пусть эта минута, как все, коротка,
Она, пробегая, *смыкает* века.

Начало дня (отрывок)

Тот, кто *минуту свиданья*
Ночи и дня подглядел,
Видел весь мир в ожиданье
Новых событий и дел.

5. Вместе с уравнением плоскости (α): $ax + by + cz = d$ возникает нормальный вектор $\vec{N} = (a, b, c)$, а с уравнением прямой

(l) на плоскости $ax + by = c$ — нормальный вектор $\vec{N} = (a, b)$.

Вместе с уравнением прямой в пространстве $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$

возникает коллинеарный ей вектор $\vec{T} = (l, m, n)$.

Придайте этим векторам эпитет «спутник»: $\vec{N} = (a, b, c)$ — спутник плоскости (α), $\vec{N} = (a, b)$ — спутник прямой (l) на плоскости, $\vec{T} = (l, m, n)$ — спутник прямой в пространстве. Еще более образно можно сказать, что в ряде задач эти векторы — «полпреды» соответствующих геометрических образов, полномочные представители плоскости, прямой, заменяющие их в решении геометрических задач векторным методом.

6. Ученику, затрудняющемуся в применении определенного математического метода к решению задачи, учитель справедливо советует: «Не спеши винить метод; может быть, ты его плохо, неумело применяешь».

И здесь вполне уместна удачно подобранная стихотворная форма совета:

Если верный конь, поранив ногу,
Вдруг споткнулся, а потом опять,
Не вини его — вини дорогу
И коня не торопись менять.

(*Расул Гамзатов*. «Берегите друзей».)

Как же быть, когда ему не удается осилить заданную математическую задачу? Вот Маяковского совет:

Черепа шкатулку
вскройте — сверкнет
драгоценнейший ум:
есть ли,
чего б не мог я?! (Из поэмы «Человек».)

Ну, а решил трудную задачу — гордись:

Это все я добыл из круглой,
Словно шар земной, головы.

(Из стихотворения *Эдуардаса Межелайтиса* «Человек».)

7. Воспринимая симметрию как вид геометрических преобразований, учащимся полезно почувствовать и ее роль в постижении и создании людьми порядка и совершенства. Обычно с этой целью на уроке демонстрируют репродукции, фотографии, модели произведений прикладного искусства, предметов природы и техники. Весьма уместной будет здесь в качестве заключительного аккорда эмоционального воздействия урока математики декламация пре-

лестного стихотворения Леонида Мартынова:

Рис. 1

На зеркальной поверхности

На зеркальной поверхности
Сидит мотылек.
От познания истины
Бесконечно далек.
Потому что, наверное,
И не ведает он,
Что в поверхности зеркала
Сам отражен.

8. Сложная функция (суперпозиция функций) $f_1(f_2(\ldots f_n(x)))$ ассоциируется с «цепной реакцией» или с «матрешками», вкладываемыми одна в другую. На рисунке 1 — функция $\ln \sin 3x$, воплощенная «матрешками».

По ходу урока учитель выполняет еще и функции воспитателя. В частности, ему приходится анализировать удачные и неудачные ответы учащихся (не забывая, конечно, мудрый совет И. Гете: «Хочешь получить умный ответ — спрашивай умно»), оценивать приемы работы, манеру поведения, хвалить и высказывать порицание, воодушевлять или, наоборот, «ставить на место». И здесь меткое художественное слово, поговорка, иронический афоризм иногда более назидательны, чем рафинированная нотация.

ПРИМЕРЫ ВОЗМОЖНЫХ РЕПЛИК В ПОДХОДЯЩИХ СЛУЧАЯХ

Скажите ученику, когда он...

1° ... мыслью предваряет слово:

«На мысли, дышащие силой, как жемчуг, нижутся слова»

(*М. Лермонтов.*)

2° ... учится «с прохладцей», ленится:

«Стоя на одном месте, новых горизонтов не откроешь». О лентяях как общественном явлении можно сказать и резче — словами поэта К. Мечиева, основоположника балкарской поэзии:

Умный трудится не уставая,
Ничего не делает глупец.
Что сказать о сущности лентяя?
Я скажу: лентяй — живой мертвец.

3° ... больше говорит, чем думает:

Юнец ты или аксакал,
Одно я знаю: ты пропал,
Коль суетность и торопливость
Себе в товарищи избрал.

(Из стих. «Наставления» балкарского поэта *С. Макитова.*)

4° ... начал отчаиваться при потере нити правильных рассуждений в доказательстве или решении задачи (чтобы разрядить обстановку растерянности):

«Думай, голова, — картуз куплю!»

(Народная поговорка.)

5° ... не замечает, что предложенный им способ решения не отличается принципиально от рассмотренного:

«Это те же штаны, да назад пуговкой» или: «Тех же щей, да пожиже влей» (Народные поговорки).

Отметим еще один методический нюанс: вкрапление в урок сообщений о происхождении математических терминов, понятий, символов. Эти небольшие оконца в прошлое математической культуры обычно заинтересовывают учащихся. Многое в этой области уже известно учителю из книг по истории математики. Приведем дополнительный мини-словарик для нескольких слов:

Апофема. Соединение двух греческих слов, означающее «нечто, отложенное в сторону».

Бесконечность. В математическом смысле слово стало употребляться по почину художника XVI века Альбрехта Дюрера. Первое определение этому понятию дал Дедекинд.

Вырождение. Впервые это слово в математическом смысле употребил Кавальери в 1635 г.: «Линия выродилась в точку».

Делитель, делимое, частное как русские термины впервые появились в учебнике Л. Ф. Магницкого «Арифметика сиречь наука числительная» (1703 г.).

Дискриминант. Термин ввел английский математик Д. Д. Сильвестр (1814-1897). Он называл себя «математическим Адамом» за множество придуманных им терминов.

Факториал. Термин появился в начале XIX века. В 1916 г. совет Лондонского математического общества рекомендовал принять обозначение $n!$ (при этом были предложения читать его так: «n — восхищение»).

Авторами некоторых слов, ставших также и математическими терминами, были известные русские писатели:

независимость — В. Тредиаковский,

несоразмерность — Н. Карамзин,

совокупность, мощность — А. Радищев.

Педагогика давно признала воспитательную ценность занимательных задач. Творческая активность, находчивость, изобретательность и смекалка достигают высшего напряжения и получают отличную тренировку, когда мысль и воля захвачены стремлением решить заинтересовавшую задачу. Найденное решение или даже чтение изложения остроумного решения всегда доставляет удовольствие, эстетическое наслаждение.

Литературная оболочка, придаваемая занимательным задачам, содействует прямому использованию текста при проведении школьных математических «Огоньков», веселых соревнований, конкурсов. Организуются математические игры, театрализованные сценки.

В нашем пособии дается лишь некоторая подборка «подсобных» рабочих материалов для творческого использования учителем в его благородной, многогранной и многотрудной миссии воспитателя. Поэтому здесь текст миниатюр подается в повествовательной, по возможности экономной форме. Учащиеся самостоятельно, когда надо, преобразуют этот материал в соответствующие инсценировки, что и само по себе полезно для развития их инициативы, воображения, фантазии.

Приведем все же два примера, отнюдь не претендующие быть образцовыми, из практики инсценированной обработки фабулы занимательных задач.

ВОЗРАСТНАЯ ЛЕСЕНКА

Летний пионерский лагерь. У костра группа пионеров и вожатый. Шутят, смеются.

Вожатый. Ребята! У меня есть друг — Асамбай. Он — пастух. И отец, и дед, и прадед Асамбая — пастухи. Кого этим удивишь в Казахстане? Но вот занятное сложилось соотношение их возрастов в этом году. Об этом недавно написал мне Асамбай (читает): «Подсчитал я произведение своего возраста на возраст отца, а затем в каждом сомножителе поменял местами цифры, и, представьте, произведение не изменилось. Слушайте далее. Перемножил я число своих лет на возраст деда и также поменял местами цифры в каждом сомножителе — опять произведение не изменилось. А более всего меня удивило то, что и в третий раз картина повторилась с произведением моего возраста на возраст прадеда». Ребята! А у кого-нибудь из вас, кому больше 10 лет, получается столь же забавная возрастная лесенка? Ну, хотя бы с двумя парами возрастов: у себя и папы, у себя и дедушки или бабушки? Катя, тебе сколько лет?

Катя. 12, папе 37. Не получается у меня так, как у Асамбая. Я прикинула: $12 \cdot 37$ — последняя цифра 4, а в произведении $21 \cdot 73$ последняя цифра 3.

К разговору прислушивался стоявший в стороне вихрастый паренек. Он подходит к группе беседующих.

Вихрастый (обращаясь к вожатому): Скажите, пожалуйста, сколько лет Асамбаю?

Вожатый. Пусть для всех присутствующих это будет задачей, а тебе я скажу по секрету (шепчет на ухо).

Вихрастый. Ну, так слушайте. Я на год старше Асамбая, знаю возраст отца, деда и прадеда, но поразительно то, что и в нашей семье получается аналогичная стабильность с произведениями возрастов, как у Асамбая.

Вожатый. Итак, выяснилось, что существуют по крайней мере две интересные возрастные лесенки — каждая из трех ступенек: он и папа, он и дед, он и прадед. Приглашаю всех приступить к поискам возрастов Асамбая, юного гостя, подошедшего к нашему огоньку, и их пап, дедов и прадедов. (Ответ на с. 111.)

ЛУНА ЗАГРУСТИЛА НАПРАСНО ИЛИ ФОРМУЛА ФУТБОЛЬНОГО МЯЧА

— Как ты оказался один на футбольном поле?

Именно этот вопрос уловил Мяч в голубоватом потоке осветивших его лучей лунного света.

— Я нарочно вывалился из сетки, в которой уносили с поля меня и моих единокожих братьев после окончания тренировки, затянувшейся до ночи.

— Для свидания со мной? — допытывалась волшебница Луна.

— Да. С твоей помощью я хочу проверить справедливость некоторых математических закономерностей, подмеченных мною в часы скитаний по зеленому полю и за его границей.

— Например?

— Я установил, что сумма квадратов расстояний от точки, в которой я сейчас касаюсь плоского прямоугольного поля, до двух диагонально-противоположных вершин углов поля точно равна сумме квадратов расстояний от той же точки до двух других вершин углов поля. (Тебе, наверно, приходилось наблюдать штрафные угловые удары?) Прошу тебя, поручи своему лучу промерить расстояния (рис. 2).

— Пожалуйста.

Подсчеты, выполненные Мячом и Лучом, подтвердили:

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$

— Ну и что же, — усмехнулась Луна и продолжала задорно, — перебросят тебя с этого места на другое, вот и пропало равенство, открытием которого ты так гордишься.

— Нет, Луна, дело совсем не в том, что я в данный момент прикасаюсь к какой-то особенной точке поля. Равенство

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \quad —$$

подтвердится для любого места, где бы я ни находился: на поле, на границе, в сетке ворот или даже «в ауте» (за пределами поля). Хочешь, я перекачусь на другую точку поля и мы еще один промер сделаем?

— Промерами ты меня не убедишь. Вот если бы это доказал кто-нибудь в общем виде...

«Болельщики-школьники докажут», — собрался крикнуть Мяч во всю мощь своих круглых упругих легких, но только подумал, а крикнуть не успел: кто-то схватил его в охапку и

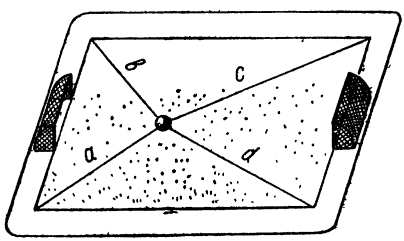


Рис. 2

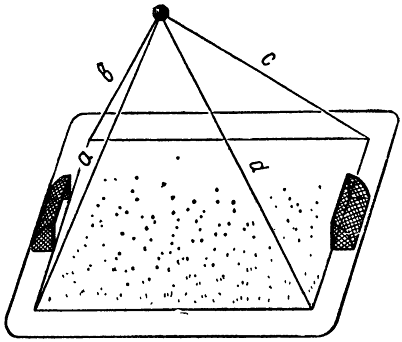


Рис. 3

унес — должно быть все-таки обнаружили его исчезновение из сетки.

Облако грусти закрыло Луну... Неуютным показалось небесное жизненное пространство.

— Не унывай, Лунатик, — ласково прошептал ей откуда-то налетевший Ветерок.—Пусть не зазнаются всякие там мячи и земные точки. Равенство

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

справедливо не только для всех точек плоскости футбольного поля, но также и для всех точек пространства, принадлежащего тебе, мне, птицам, самолетам, спутникам (рис. 3).

Конечно, Ветер всюду бывает, многое видит и, вероятно, все знает. Но мы больше доверяем законам Геометрии и доводам Разума. Подтверждают ли они формулу Мяча и утверждение Ветра?

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Сильно возлюбив искусство числительное, помыслил я, что без *числа* никакое рассуждение философское не слагается, всей мудрости матерью его почитая.

Анания Ширакец, армянский математик (VII век)

НУЛЬ

Нуль — ничто и нечто. Нечто существенное и значительное. В счете он не нужен, но без него не обойдется никакое исчисление. Нуль — число, и нуль — вектор, и нуль — «пустое» множество.

Его не считают своим ни множество натуральных, ни множество целых отрицательных чисел. Но, утвердившись на их «стыке», нуль вошел и в множество всех целых чисел, и в множество чисел четных, и рациональных, и комплексных... Он—«Фигаро — здесь, Фигаро — там».

Включаясь в то или иное множество, нуль во многом остается весьма самобытным его элементом. Он — как киплингова «Кошка, которая гуляла сама по себе». У Киплинга дикая Кошка вступает в противоборство с созидательным началом — Женщиной, хранительницей порядка. В таком же смысле противоборства двух тенденций: разрушительной ($u \to 0$) и созидательной ($v \to \infty$) — расшифровывается математический иероглиф $0 \cdot \infty$. Нуль — единственное число, которому дозволено называться бесконечно малой величиной. Любое число можно брать в отношении к любому другому числу, но только не к нулю: действует вечное, непреложное вето в делении числа на нуль.

Своенравие и самобытность нуля делают его весьма достойным быть «героем» прозы, стихов, афоризмов.

Но дружбы нет и той меж нами.
Все предрассудки истребя,
Мы почитаем всех нулями,
А единицами — себя.

(*А. С. Пушкин.* Из «Евгения Онегина».)

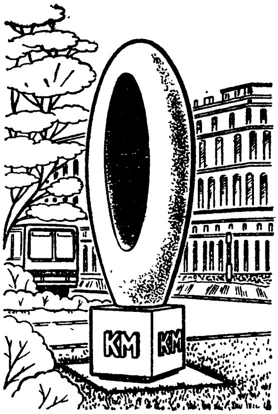
* * *

Напрасно думают, что ноль
Играет маленькую роль.
(*С. Я. Маршак.* Из стихотворения «Ноль и единица».)

* * *

Нуль (из ученического творчества)

Когда-то многие считали,
Что нуль не значит ничего,
И, как ни странно, полагали,
Что он совсем не есть число.
Но на оси средь прочих чисел
Он все же место получил
И все действительные числа
На два разряда разделил.
Нуль ни в один из них не входит
(он сам составил чисел класс),
Все ж об его особых свойствах
Мы поведем теперь рассказ.
Коль нуль к числу ты прибавляешь
Иль отнимаешь от него,
В ответе тотчас получаешь
Опять то самое число.
Попав как множитель средь чисел,
Он мигом сводит все на нет.
И потому в произведенье
Один за всех несет ответ.
А относительно деленья
Нам твердо помнить нужно то,
Что уж давно в научном мире
Делить на нуль запрещено.
Причина всем здесь очевидна,
И состоит она лишь в том,
Что смысла нет в таком деленье,
Противоречье в нем самом.
И впрямь: какое из известных
Число за частное нам взять,



Когда с нулем в произведенье
Все числа нуль лишь могут дать?
a в нулевой есть единица,
Так все условились считать,
И глубоко бы тот ошибся,
Кто б это вздумал доказать.
Но «правил нет без исключений»,
Уместно здесь оговорить:
Значенье нуль для основанья
Необходимо исключить.

* * *

В центре Будапешта, неподалеку от одного из красивейших мостов, установлено каменное изваяние нуля. Цифра «0» и две буквы на пьедестале — «км» означают начало всех дорог, нулевой километр, от которого ведется отсчет километрам.

«Нуль», как это сооружение иногда называют будапештцы, стал одной из достопримечательностей столицы Венгрии.

Воспоминания Мариэтты Шагинян

Красота и увлекательность теории была огнем, пожиравшим наши сердца в вузах, на рабфаках, в специальных школах, какой была, например, Плановая академия, куда я поступила, чтоб переучиваться...

На кафедре математики читала в то время лекции профессор Яновская, а мы бегали слушать ее и пьянели от изложения математических тетрадей Маркса, где Маркс бросил мысль о «нуле» как не о нуле, потому что, если б ноль был только ноль, от него невозможен был бы переход к единице...

ЕДИНИЦА

«Героиня» аксиом и «прима» всякого счета. Та самая, о которой говорится: «мал, да удал». Без единицы не состоялось бы даже самое примитивное исчисление — двоичное. Единица самый древний предок современного семейства чисел. Примечательно, что только она одна из всех числительных имеет множественное число:

один, одна, одно — в единственном числе,
одни — во множественном.

И в жизни, и в математике не раз доказывала *Единица*, что «и один в поле воин». В задаче она иной раз — тот «мазок», который делает прекрасным все «полотно» ее решения.

Магическая сила единицы

Более трехсот лет, с 1630 г., будоражит умы «великая теорема Ферма»: *уравнение* $x^n + y^n = z^n$ *не имеет целочисленных решений при* $n > 2$. «Но недостаток места не позволяет мне записать доказательство», — написал Ферма на полях страницы книги Диофанта.

Не пугайтесь, речь не пойдет об очередной попытке поймать неуловимое доказательство. Мы здесь полушутя, полусерьезно покажем, что́ может маленькая единица сделать с великой теоремой. Достаточно прибавить единицу к одному из показателей степени — и труднейшая проблема преобразуется в несложную, красиво решаемую задачу:

в целых числах решить уравнение $x^n + y^n = z^{n+1}$.

Решение мы получаем сразу, беря два произвольных натуральных a и b и полагая $z = a^n + b^n$, $x = az$, $y = bz$.

Апофеоз: $x^n + y^n = (a^n + b^n)z^n = z^{n+1}$.

Математический сказ о том, как единица превратила стекляшку в алмаз

Какие числа являются делителями вот такой «малютки»:

$$N = 1,152,921,504,606,846,975?$$

Алгоритм решения такой задачи известен. Но прямое его применение здесь трудоемко, утомительно, а потому и не сулит приятных эмоций.

Выходит, что задача — стекляшка, а не алмаз? Повременим с оценкой. Придадим стекляшке дополнительную грань: из системы десятичной перебросим данное число в двоичную, где используются лишь две цифры — нуль и единица. Оно в одно мгновенье примет должный вид, когда «сверкнет догадки луч», что данное число лишь на 1 меньше числа 2^{60}, т. е., что $N = 2^{60} - 1$.

Теперь ясно, что $N = 2^{60} - 1 = (\underbrace{11...11}_{\text{60 единиц}})_2$.

Вот эти единицы двоичной записи числа и превратили стекляшку в бриллиант.

Искомые делители — блестящие кусочки бриллианта:

$$(11)_2 = 3,\ (111)_2 = 7,\ (1111)_2 = 15,\ (11111)_2 = 31,$$
$$(111111)_2 = 63,\ (1111111111)_2 = 1023,\ (\underbrace{11...11}_{\text{12 единиц}})_2 = 4095,$$
$$(\underbrace{11...11}_{\text{15 единиц}})_2 = 32767,\ (\underbrace{11...11}_{\text{20 единиц}})_2 = 1048575,\ (\underbrace{11...11}_{\text{30 единиц}})_2 = 1073741823.$$

Немного размышлений и образуется еще один набор решений:

$$(101)_2 = 5,\ (1001)_2 = 9,\ (10101)_2 = 21,\ (100001)_2 = 33 \text{ и т. д.}$$

Так нуль и единица (хвала им!) облегчают работу мозга. Мудрые ЭВМ «сообразили» это сразу.

Как хороша двоичная система
И как проста в ней вычислительная схема!
Забавна записи канва:
Один с нулем не 10 здесь, а 2.
В системе этой, как легко понять,
Сто плюс один не 101, а пять.

* * *

А вот 1 и 0 в ритмическом чередовании: $\underbrace{1010\ldots10}_{2n \text{ знаков}}$. Что это? Оказывается, стройный двоичный эквивалент «неуклюжей» записи числа $\frac{2}{3}(4^n - 1)$.

* * *

✓ *А. Стариков.* Необыкновенная девочка (из журнала «Квант»)

Ей было тысяча сто лет,
Она в сто первый класс ходила,
В портфеле по сто книг носила—
Все это правда, а не бред.
Когда, пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий.
Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами,
И десять загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И десять темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно...
Но станет все совсем обычным,
Когда поймете наш рассказ.

Действительно, впечатляющий портрет девочки! Но ведь ничего необыкновенного в этой школьнице нет. Не правда ли?

* * *

Илья Фоняков. «Актер» (отрывок)

Почти дожив
До голубых седин
Я понял,
Арифметике назло,
Что у людей
Простейшее «один»
Поистине сложнейшее
Число.

На уроке математики или при составлении викторины для выяснения, хорошо ли поняли ученики определение простого числа, этот отрывок можно сопроводить вопросом: каков содержательный смысл слов «арифметике назло» в контексте приведенной выдержки?

Ответ. Действительно, в жизни одиночество («один») — сложное состояние человека, а фразой «арифметике назло» поэт напоминает, что в арифметике единица — не составное (не «сложное») число; однако к простым числам ее также не относят. Единица и в этом — число уникальное.

* * *

Остроумно шутит польский сатирик Станислав Ежи Лец в своих «Непричесанных мыслях»: «*Первый* человек не чувствовал себя одиноким, он ведь не умел считать».

ДВА... ПЯТЬ... СЕМЬ...

В материальном мире нет предмета, название которого — «число», например, «число 2». «Число» — это абстрактное понятие, удачно отображающее некоторые свойства реального мира. В жизненных, производственных и других ситуациях нередко требуется проявить хорошее «ощущение числа» (оценка правдоподобности числового результата, его значимости и т. д.). Оно вырабатывается постепенно и нуждается в тренировке. Полезны разнообразные реализации числа, поражающие воображение, причем не только на уровне макро- или микромира, но и для самых обыкновенных, «рядовых» чисел.

Пример. Сердце человека в 1 мин делает в среднем 75 биений; за 75 лет безостановочной работы оно делает около 3 000 000 000 биений!

Формированию «ощущения числа» способствуют также и его поэтические интерпретации. Нет поэта, которого не вдохновляла бы реальность, натура — мать натуральных чисел, а вместе с ними и всей цивилизации человечества. Не удивительно, что именно натуральные числа прежде других становятся непосредственным субъектом фольклора и стихотворений серьезных и шутливых.

Число не только постоянный атрибут теорем и задач, но и предмет бесед с учениками, ученических докладов на внеклассных встречах, например о числовых суевериях, на историко-математические темы.

Стихи и литературные отрывки о конкретных числах здесь вполне уместны.

(Учителю нетрудно найти в литературе соответствующие стихотворения.)

Число два в головоломке. Используя только двойку и только одно действие, запишите пятизначное число, первая и последняя цифры которого 6.

Ответ. $2^{2^{2^2}} = 65536$.

Число семь. На классных или внеклассных встречах с учащимися рассматриваются в той или иной форме отдельные факты истории развития понятия о натуральном числе для укрепления в сознании учащихся материалистических представлений о понятии числа.

Учащиеся узнают, в частности, о том, что овладение счетом долго находилось в стадии: один, два, много. Позже, «много» — это уже «семь» и больше. Следы этой стадии доходят вплоть до нашего времени, проявляясь в пословицах, поговорках и стихах о числе семь, где «семь» — математический символ множественности. Например, в поговорках:

Одним махом семерых убивахом. Один с сошкой, семеро с ложкой. Семь бед — один ответ. Лук — от семи недуг. Сам не дерусь, семерых не боюсь. «Дочь лесника долго и старательно рассказывала нам дорогу и наговорила семь верст до небес и все лесом» (В. Солоухин. «Владимирские проселки»).

Эксперименты инженерной психологии (науки, пользующейся методами физиологии, математики и технических наук) открыли такую особенность человеческого мозга: различать семь основных звуков в гамме и семь основных цветов в спектре.

Д. С. Фаермарк. **Из книги «Задача пришла с картины»**

В бесконечном множестве натуральных чисел, так же как среди звезд Вселенной, выделяются отдельные числа и целые их «созвездия» удивительной красоты, числа с необыкновенными свойствами и своеобразной, только им присущей гармонией. Надо только уметь увидеть эти числа, заметить их свойства. Всмотритесь в натуральный ряд чисел — и вы найдете в нем много удивительного и диковинного, забавного и серьезного, неожиданного и курьезного. Видит тот, кто хочет. Видит тот, кто смотрит. Ведь люди и в летнюю звездную ночь не заметят... сияние Полярной звезды, если не направят свой взор в безоблачную высь.

* * *

Квадратные числа с пестрым «хвостом»

Квадрат любого натурального числа, в хвосте которого девять единиц, является числом с еще более красивым хвостом:

... 987654321

Убедитесь!

* * *

Вроде бы убедительное

объяснение хозяина гостиницы, как он решил задачу о размещении в девяти комнатах десяти приезжих так, что каждому из них досталось по одной комнате...

Их было десять чудаков,
Тех путников усталых,
Что в дверь решили постучать
Таверны «Славный малый».

— Пусти, хозяин, ночевать,
Не будешь ты в убытке,
Нам только ночку переспать,
Промокли мы до нитки.

Хозяин тем гостям был рад,
Да вот беда некстати:
Лишь девять комнат у него
И девять лишь кроватей.

Восьми гостям я предложу
Постели честь по чести,
А двум придется ночь проспать
В одной кровати вместе.

Лишь он сказал, и сразу крик,
От гнева красны лица:
Никто из всех десятерых
Не хочет потесниться.

Как охладить страстей тех пыл,
Умерить те волненья?
Но старый плут хозяин был
И разрешил сомненья.

Двух первых путников пока,
Чтоб не судили строго,
Просил пройти он в номер «А»
И подождать немного.

Спал третий в «Б», четвертый в «В»,
В «Г» спал всю ночь наш пятый,
В «Д», «Е», «Ж», «З» нашли ночлег
С шестого по девятый.

Потом, вернувшись снова в «А»,
Где ждали его двое,
Он ключ от «И» вручить был рад
Десятому герою.

Хоть много лет с тех пор прошло,
Неясно никому,
Как смог хозяин разместить
Гостей по одному.

Иль арифметика стара,
Иль чудо перед нами,
Понять, что, как и почему,
Вы постарайтесь сами.

(Из английского журнала прошлого века; перевод Ю. Данилова.)

* * *

Степан Щипачев. **Учитель (отрывок)**

... Не из учебника задача,
а потрудней открылся шифр.
Ребята поняли, что значат
простые с виду десять цифр.
Без них над ясностью речною
не возносились бы мечты;
на небо поглядев ночное,
о расстоянье до звезды
нигде не вычитал бы ты...

ВСЕ ДАРЫ ПРОМЕТЕЯ

Послушайте, что смертным сделал я...
Число им изобрел
И буквы научил соединять...

(*Эсхил.* Прикованный Прометей.)

* * *

Мы любим все — и жар холодных чисел,
И дар божественных видений...

(*Александр Блок.* Скифы.)

* * *

Степан Щипачев. **Стихи о цифрах (три отрывка)**

Цифры, что рядышком встали,
Каждая — раз уж стоит —
Тонны испытанной стали
Взвалит на плечи свои.
Славить готов и таблицы
Мой безыскусственный стих,
Только б счастливые лица
Чаще мне чудились в них.
....
Цифры приметны почету,
В сводках, как совесть, чисты.
Знаем, который по счету
Лег километр на грунты.
....
Цифры, что вписаны в сроки,
Годы уже не сотрут.
Это — плотины, дороги,
Это — к планетам маршрут.

В. Брюсов. **Числа (отрывок)**

... Предчувствие разоблачает тайны,
Проводником нелицемерным светит:
Едва откроется намек случайный,
Объемлет нас непредсказанный трепет.

Вам поклоняюсь, вас желаю, числа!
Свободные, бесплотные, как тени,
Вы радугой связующей повисли
К раздумиям с вершины вдохновенья.

(Своеобразное обобщение первых успехов в познании количественных закономерностей природы.)

К ПОНЯТИЯМ ГЕОМЕТРИИ

Пространству мера троякая:
В долготу бесконечно простирается,
В ширину беспредельно разливается,
В глубину оно бездонно опускается.
Подражай сей мере в делах своих...

Ф. Шиллер

ТОЧКА. ЛИНИЯ. ПРОСТРАНСТВО

В критической статье, посвященной работе Кюхельбекера, Пушкин пишет:

«Вдохновение нужно в поэзии, как и в геометрии»
Знаменательная фраза!

Профессору Геттингенского университета Давиду Гильберту, одному из крупнейших математиков нашего века, однажды сказали, что его студент оставил математику, решив посвятить себя поэзии.

— Меня это не удивляет, — ответил Гильберт, — у него чувствовался недостаток фантазии!

Вдохновение по Пушкину и фантазия по Гильберту более чем родственные категории. Суждение Пушкина, относящееся к геометрии, по-видимому, было не беспочвенным. Примерно в то же время, но уже по другому случаю, он записывает в своей тетради: «Вдохновение нужно в геометрии, как и в поэзии», поменяв местами поэзию и геометрию и как бы подчеркивая их равноправие перед лицом вдохновения. Такое сопоставление не случайно, как это отмечает академик М. П. Алексеев в одной из своих статей.

В 1826 г., когда эти фразы были записаны Пушкиным, Н. И. Лобачевский уже говорил о своей новой геометрии, а отзвуки его речи в Казанском университете, произнесенной 24 февраля 1826 г., могли дойти до Пушкина.

М. Л. Картрайт. **Математика и математическое мышление**

В III веке н. э. неизвестный автор шутливо относил к геометрии слова Гомера:

Малой она родилась, но, взрослея, росла с каждым часом.
Ныне, идя по земле, сотрясает вокруг целый мир.

Это означает, что математики начали с точки и линии, а пришли к таким вещам, которые управляют поднебесным миром.

* * *

Геометрическая красота скрещения теней, отображающих на снежные равнины России ажурные каркасы «Больших строек», в поэтическом преломлении Екатерины Шевелевой:

Геометрия линий.
Как будто
окрестность расширив,
В бесконечность уходят
скрещения зимних теней.
Белокрыла зима.
Бесконечна равнина России.

....
И — частица крылатости —
Я ничего не боюсь!
Все мне чудится,
Что геометрия эта проснется.

Евгений Винокуров. **Геометрия**

О Петр, ведь ты построил город
Не для умерших — для живых?..
Тяжелый дождь бежит за ворот
Окаменевших часовых.
Недвижимы аллеи парков.
Прямы проспекты, как стрела.
Сильней божественных монархов
Здесь геометрия была.
Был нежен в башнях цитадели
И кроток лепет голубиц...
И, страшные, на мир глядели
В окно глаза цареубийц.
Гуляют каменные финны.
Курятся трубки из бород.
Вот и построили Афины
Средь топей северных болот!
Налево львы. И львы направо.
А у заставы инвалид
Штык держит вертикально прямо,
Как геометрия велит.

Вениамин Каверин. **Несколько лет (отрывок из статьи)**

В фантастическом театре Евгения Шварца Тень не может простить человеку, что она была его тенью. Она рвется к власти. Тень доказывает, что этот захват разумен, логичен, обоснован. В самом деле, разве она не выше человека? Она может «тянуться по полу, подниматься по стене и падать в одно и то же время, — способен он на такую гибкость?» Она умеет «лежать на мостовой, и прохожие, колеса, копыта коней не причиняют ей ни малейшего вреда, — а он мог бы так приспособиться к местности?» Вот почему Тень требует, чтобы человек лежал у ее ног. Но жизнь сложнее, чем это кажется Тени с ее двухмерным мышлением, с ее чувствами, распластанными на плоскости. Когда человека приговаривают к смерти и казнят за то, что он остается самим собой, — голова человека слетает с плеч и у Ее Величества Тени.

* * *

В. Брюсов. **Мир *N* измерений**

Высь, ширь, глубь. Лишь три координаты.
Мимо них где путь? Засов закрыт.
С Пифагором слушай сфер сонаты,
Атомам дли счет, как Демокрит.
Путь по числам? — Приведет нас в Рим он.
(Все пути ума ведут туда!)

То же в новом — Лобачевский, Риман,
Та же в зубы узкая узда!
Но живут, живут в N измереньях
Вихри воль, циклоны мыслей, те,
Кем смешны мы с нашим детским зреньем,
С нашим шагом по одной черте!
Наши солнца, звезды, всё в пространстве,
Вся безгранность, где и свет бескрыл,
Лишь фестон в том праздничном убранстве,
Чем их мир свой гордый облик скрыл.
Наше время — им чертеж на плане,
Вкось глядя, как мы скользим во тьме,
Боги те тщету земных желаний
Метят снисходительно в уме. (1924 г.)

Краткое пояснение. «Мир N измерений» в математике — пространство n переменных. Естественно, что его поэтический образ — космос (а может быть, и «мир» атома), являющийся реальным пространством по меньшей мере четырех измерений (четвертая координата — время). Остальное — «вихри воль», «циклоны мыслей» — художественный вымысел поэта.

В. Я. Брюсов первым из советских поэтов активно и увлеченно сочинял стихотворения, которые он сам определял как «научную поэзию».

* * *

Трехмерное пространство красоты

Георгица Кара-Стоянова — известная болгарская революционерка — говорила так:

«Красота женщины измеряется *высотой* ее идей, *силой* ее чувства, *широтой* ее знаний».

* * *

Панегирик точке, которая есть и символ, и знак, и геометрическая абстракция, и физическая реальность, и метафора, и другое, составлен инженером Б. Матушкиным и озаглавлен:

Точка, точка, запятая...

Доказано: неприметная крапинка, попросту именуемая точкой, имеет изумительную родословную, геральдическому древу которой могут позавидовать и более важные персоны. Точка — один из любимейших знаков седой древности: писцы расчленяли им свои тексты. Точка — одно из уцелевших слов, которыми издревле пользовались славяне. Точка — родимая матерь латинского «пункта», от которого рукой подать до пунктира.

Мир точек многолик и многообразен. И будь создан для них музей, то в нем предстали бы во всей красе и точки-слова, и точки-знаки, и точки-вещи, и точки-меры.

Никто не пытался классифицировать точки, а зря. Судите сами, как велики здесь возможности для любопытных открытий и обобщений. Ведь есть точка торговая и точка огневая, точка отправления и точка отправная, кипения и замерзания, точка роста и мертвая точка, есть точка росы и критическая точка пара, собственная точка зрения и точка зрения оппонента, есть точка материальная и точка мнимая, точка спрямления и точка перегиба. Но есть еще точки асимптотические, гиперболические, заостренные, изолированные, особые, правильные, предельные, рациональные, характеристические. У математиков любая точка незрима и невесома, у механиков она уже имеет вес и массу, а триангуляционная — у геодезистов — обладает не только весом, но и видна за десятки километров.

Без точки человеку было бы неудобно ни множить, ни делить, без нее он не придумал бы ни двоеточия, ни многоточия, ни вопросительного, ни восклицательного знаков; без точки невозможно было бы создать азбуку Морзе и тем более модель Солнечной системы. А как изобрели бы без точки точечную сварку и точечный диод? Кто придумал бы без нее радиоточку и точечный метод в математике? Не будь точки, как существовали бы алгебраические задачники, в основе которых заложены неистощимые точки *А*, *В* и *С*, откуда бесконечно бегут, летят, едут или передвигаются по-пластунски?

Точка — родоначальник множества прекрасных вещей и открытий. Именно с нее начинается тот простейший рисунок, при создании которого мы приговариваем: «Точка, точка, запятая, минус — рожица кривая». С точки начинались и атом, и электрон. С точечного заряда начинается все волшебство электротехники.

Точка — всему начало и всему венец. С точки начинается запятая и ею заканчивается любой капитальный труд. Из точки, и только из нее, отправляются и только в точку прибывают.

Пусть точка не линия. Но, право, нужно быть невеждой, чтобы не знать, что линия состоит из точек. Даже лемниската и циклоида — эти симпатичные геометрические линии с поэтическими женскими именами — всего навсего множества точек.

Судьба человека соприкасается с необъятным роем точек. Мы можем ставить точки над «и» и можем, как говорится, доходить до точки. Мы можем бить в одну точку и не брезгуем при случае многоточием. Чьи-то мысли вдруг точка в точку похожи на наши, и чьи-то доводят нас до точки кипения.

Любая точка на Земле имеет свою долготу и широту. Малозаметная на нотоносном стане, она повелевает длительностью звука. Простейшая мертвая точка властно требует от инженеров мощного маховика к механизму. Ею обозначают Солнце и атом. Вокруг нее кружится ножка циркуля, описывающего самую большую по площади фигуру с наименьшим периметром. Точка — составляющая оси, вокруг которой вращается Вселенная. И право, найди Архимед точку опоры, он перевернул бы весь мир!

Точкой в старину измеряли длину и время, ибо русский дюйм состоял из ста, а минута — из шестидесяти точек.

Есть, конечно, и царственные точки, занявшие особое положение в своем мире. Они именуют себя то фокусом, то полюсом, то центром.

Точка — такая универсальная вещь, которая может заменить собой все на свете. Действительно, точка на карте — город или поселок, точка в небе — далекая звезда. Ею мы заменяем часть слова, хотя бы тогда, когда пишем «и т. д.», «и т. п.», «и др.», «и пр.».

Вот и сейчас, пользуясь этим замечательным свойством, мы заканчиваем повествование **точкой.**

* * *

Но и поэзию пленила математическая точка:

Я — невидимка. В том вся суть моя,
Что в представлении дана лишь я...
Представишь ты себе меня — я вот!
И без меня ничто здесь не пройдет.
Во всех вещах могу я воплотиться,
И все, что есть, все для меня — граница.

(Из книги *В. Литцмана* «Веселое и занимательное о числах и фигурах», Физматгиз, 1963.)

* * *

Павел Антокольский **(отрывок)**

Трехмерный мир Евклида страшно прост
И просто страшен. Есть четырехмерный.
В нем правит Время, отданное в рост.
Двадцатый век — его союзник верный.
Ему не Ньютон, а Эйнштейн сродни!
Встань! Нашу песню с ними затяни!

(В последней фразе поэт обращается к Музе. — *Б. К.*)

ФОРМЫ. ФИГУРЫ

Могущественна геометрия; в соединении с искусством — неодолима.

(Еврипид)

Вирджил Теодореску. **Круглое (отрывок)**

Из всех существующих форм —
Так говорили греки —
Верх совершенства —
Сфера!
Человек —
Гордость, и радость, и разум
Обширного мира живого.
Разве он не достоин

Жить в самой высокой
И сверхсовершенной форме?!
Поэтому наша планета, как шар...

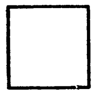
Страна моя — капля живая...
На нашей по кругу летящей
Сферически мудрой планете.

(Перевод с румынского В. Гончарова.)

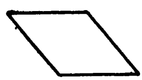
* * *

Эжен Гильвик. **Из книги «Евклидовы мотивы»**

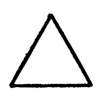
(перевод с французского Мориса Ваксмахера, 1967)

Квадрат 

Любая из твоих сторон,
На трех соседок глядя,
Себя в них видит и собой любуется.
Но кто же с кем подружится из них?
Те, что пересекаются?
Иль те, что параллельны?
А тут еще углы,
И в них сердито тычется пространство,
А у тебя своих забот
Хватает...

Ромб 

Квадрат обмяк,
Устал,
Дал за углы себя схватить
И ромбом стал.
И загрустил:
А вдруг он промахнулся,
А вдруг бы жизнь другим путем пошла,
Подставь он
Два других угла?..

Равносторонний треугольник 

Я слишком далеко
Зашел в любви к порядку.
Увы, мне больше не о чем мечтать.

Синусоида 

$y=\sin x$

Ах, как томительны вечные спуски,
Как утомительны вечные взлеты!..

В каждой ложбине,
На каждой вершине —
Тщетной надеждой — мечта о привале,
Об остановке, о передышке.

Циклоида 

Интересно, какие песни
Синусоида бы запела,
Доведись ей вот так же
Камнем лететь с обрыва
И, едва опомнившись от удара,
Снова карабкаться по крутому склону...

* * *

Евгений Паин. **Треугольник и Квадрат**

Жили были два брата:
Треугольник с Квадратом.
Старший — квадратный,
Добродушный, приятный.
Младший — треугольный,
Вечно недовольный.
Стал расспрашивать Квадрат:
«Почему ты злишься, брат?»
Тот кричит ему: «Смотри:
Ты полней меня и шире.
У меня углов лишь три,
У тебя же их четыре».

Но Квадрат ответил: «Брат!
Я же старше, я — квадрат».
И сказал еще нежней:
«Неизвестно, кто нужней!»
Но настала ночь, и к брату,
Натыкаясь на столы,
Младший лезет воровато
Срезать старшему углы.
Уходя, сказал: «Приятных
Я тебе желаю снов!
Спать ложился — был квадратным,
А проснешься — без углов!»
Но наутро младший брат
Страшной мести был не рад.
Поглядел он — нет квадрата.
Онемел... Стоял без слов...
Вот так месть! Теперь у брата
Восемь новеньких углов!

К ПОНЯТИЯМ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА

Алгебра — интеллектуальный инструмент, который создан, чтобы придать ясность количественному аспекту мира.

А. Уайтхед

ДЕЙСТВИЯ. УРАВНЕНИЯ

Посредством уравнений, теорем
Я уйму всяких разрешил проблем.

(*Чосер*, английский поэт, средние века.)

Л. Пантелеев. **Задача с яблоками**

Нам из Гомеля тетя
Ящик яблок прислала.
В этом ящике яблок
Было в общем немало.
Начал яблоки эти
Спозаранок считать я,

Помогали мне сестры,
Помогали мне братья...
И пока мы считали,
Мы ужасно устали,
Мы устали, присели
И по яблоку съели.
И осталось их сколько?
А осталось их столько,
Что, пока мы считали,
Восемь раз отдыхали,
Восемь раз мы сидели
И по яблоку ели.
И осталось их сколько?

Ох, осталось их столько,
Что, когда в этот ящик
Мы опять поглядели,
Там, на дне его чистом,
Только стружки белели...
Но прошу рассчитать я
Всех ребят и девчонок,
Сколько было нас, братьев?
Сколько было сестренок?
Поделили мы яблоки
Все без остатка.
А всего-то их было
Пятьдесят без десятка.

* * *

Стая обезьян (древнеиндийская задача)

На две партии разбившись,
Забавлялись обезьяны.
Часть восьмая их в квадрате
В роще весело резвилась.
Криком радостным двенадцать
Воздух свежий оглашали.
Вместе сколько, ты мне скажешь,
Обезьян там было в роще?

Решение. $\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x \Longrightarrow x \in \{16; 48\}$.

Клетки глаза «вычисляют» цвет

(По материалам очерка В. Демидова «Радуга из нуль-цвета». — Знание — сила, 1978, № 12.)

Эту тайну выведал у Природы физиолог Альфред Лукьянович Ярбус. Оказывается, что поле зрения (сетчатка), воспринимающее изменчивый мир красок, окаймлено полоской, светоприемники которой всегда генерируют один и тот же цвет — светло-серый. Ярбус назвал ее полоской «нуль-цвета». Именно в сравнении с нуль-цветом и постигается всякий цвет. Сравнение осуществляется на границе поля зрения с периферийной полоской нуль-цвета так, как будто здесь выполняется соответствующее математическое действие над двумя числами.

Первое число — это сигнал, характеризующий степень возбуждения фоторецепторов (светоприемников) сетчатки, второе — сигнал фоторецепторов периферии. Любопытно, что для количественного сравнения таких чисел-сигналов Природа «догадалась» заменить действие деления чисел более легким действием — вычитанием их логарифмов.

Положим, что на сетчатку наших глаз спроецировалась чистая синева неба. На периферию сетчатки эта синева не попадает, там — постоянно нуль-цвет. Между синим и нуль-цветом — граница, в «математических лабораториях» которой мгновенно вырабатываются сведения о соответствующей разности логарифмов чисел-сигналов. Зрительный аппарат глаза воспринимает эти сведения как команду: «залить все видимое поле сигналами «синева» — и мы в и д и м синий тон неба, в ы р а б о т а н н ы й нашим мозгом!

Пусть на фоне неба появился красный флаг. Теперь на границе «красное — синее» выполняется сравнение соответствующих сигналов-чисел, по результату которого видимая поверхность флага окажется залитой красным цветом, с о з д а н н ы м нашим мозгом.

Выстраивается цепочка чисел: нуль-цвет — синее — красное. Можно сказать и так, что каждый новый цветовой тон, лежащий на фоне предшествующего тона, выглядит как бы очередной вложенной фигуркой цветовой «матрешки».

Светло-красный, светло-зеленый и светло-синий цвета считаются основными красками п о л о ж и т е л ь н о й яркости. Каждому из них соответствует п о л о ж и т е л ь н а я р а з н о с т ь логарифмов. И если эти три положительные разности одинаковы, мы видим белый цвет.

Тона о т р и ц а т е л ь н о й яркости — черно-сине-зеленый, черно-пурпурный и черно-оранжевый. Каждому из них соответствует о т р и ц а т е л ь н а я р а з н о с т ь логарифмов. Равенство трех отрицательных разностей создает восприятие черного цвета.

Все остальные цвета суть комбинации положительных и отрицательных разностей логарифмов.

Итак, два математических действия, логарифмирование и вычитание, а как красиво они вписались в модель физиологического механизма восприятия человеческим глазом всех цветов радуги! Так в $(n + 1)$-й раз подтвердился афоризм Галилея: «Великая книга природы написана математическими символами».

Принцип полной математической индукции (стихи автора)

Предмет рифмованной «инструкции» —
Показ математической индукции.
Послушайте меня. Могу я рассказать,
Как для любого n ($n \in N$) нам теорему доказать.
Для меньшего из допустимых n ее мы проверяем
И верною для некоторого k ($k \in N$) предполагаем.
Потом $k + 1$ берем значеньем n. Для этого значенья
Покажем справедливость доказуемого утвержденья.
Теперь индукция к любому n нас по ступеням поднимает
И доказательство тем самым завершает.

Н. А. Некрасов. Кому на Руси жить хорошо

...идите по лесу
Против столба тринадцатого
Прямехонько версту:
Придете на поляночку,
Стоят на той поляночке
Две старые сосны...

(«Тринадцатого» и «версту» — координаты поляночки.)

* * *

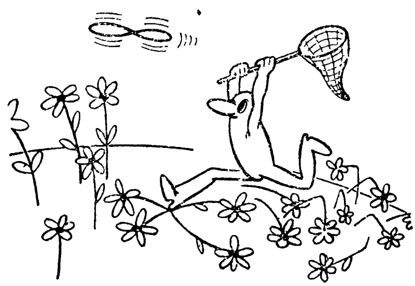
Константин Симонов. Сын артиллериста (отрывок)

Третий сигнал по радио.
«Немцы вокруг меня,
Бейте четыре-десять,
Не жалейте меня!»
Майор побледнел, услышав.
Четыре-десять — как раз
То место, где его Ленька
Должен сидеть сейчас.

Леонид Вышеславский. Формула цветка

Сплелись в клубок запутанные
трассы
рабочих пчел, и оводов, и ос.
Разгул цветов.
Сплошное буйство красок.
Неразбериха полная.
Хаос.
Но это только кажется снаружи.
Лишь озарясь познания огнем,
мы *изнутри*
порядок обнаружим,
строжайший строй
в нестройности найдем.
И станет ясным листьев
бормотание,
и пляска пчел у тесного летка,
и, разглядев растение,
ботаник
изобразит нам
формулу цветка.

Математическим воплощением поэтической мечты о «формуле цветка» являются, например, уравнения кривых, напоминающих очертания лепестков или листьев цветка (см. с. 35)



* * *

И в мире, где все граница,
Все только предел и преграда,
Бездонная бесконечность, —
Ты мне лишь одна отрада!
(*Евг. Винокуров.*)

Формулу стилизованной ромашки, изображенной на рисунке 4, образуют два уравнения в полярной системе координат $(r;\ \varphi)$:

$r = \sin^2 3\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ — уравнение «лепестков»,

$r = 21 \cdot \sin\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi,\ 0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$ — уравнение «стебелька» (циссоида Диоклесса).

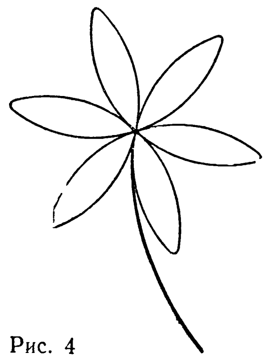


Рис. 4

Ознакомить старшеклассников с полярными координатами и способом построения кривой по ее уравнению совсем незатруднительно, а «рисование формулами» — увлекательное и полезное внеклассное занятие.

Кроме того, стихотворение «Формула цветка» воспринимается как сочный поэтический эквивалент известному высказыванию создателя кибернетики Норберта Винера: «Высшее назначение математики... состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает».

Кристаллы уступают цветам в сложности форм и гармонии линий. Их «формула» проще. П р и м е р. Кристалл алмаза имеет вид октаэдра; $|x| + |y| + |z| = 1$ — уравнение его поверхности.

Фрагмент из поэзии *С. Маршака*

Некоторые исследователи творчества Маршака полагают, что чуть ли не вся его поэзия — это поэзия порядка. Пишут: «Последовательно, настойчиво, упорно, подчас полемично Маршак воспевает упорядоченность как наивысшую и наипоэтичнейшую ценность мира». А упорядоченность — это и математическое понятие.

Вы, что умеете жить настоящим,
В смерть, как бессмертные дети, не верьте.
Миг этот будет всегда предстоящим —
Даже за час, за мгновенье до смерти.

Небольшая мобилизация воображения — и эта строфа предстанет поэтической трансляцией структуры $f(x) \to A$ при $x \to x_0$: «миг» возможного равенства $f(x) = A$ мы мыслим «всегда предстоящим», даже за мгновение до предельного значения $x = x_0$.

* * *

Семен Кирсанов. Текущий момент (сонет)

А ведь момент действительно
течет,
А не мелькает.
Медленно и долго
Течет момент,
как маленькая Волга,
И в вечность все явления влечет.
Его частиц не познаваем счет
И может в нем теряться,
как иголка,
Частица счастья,
и крупица долга,
И боль, что сердце надвое сечет.
Чушь! Не течет момент.
И течь не должен.
Ни с места он

и вечно недвижим,
Как лед,
Который лыжами заскольжен.
Не убавляем он,
нерастяжим.
Не начат никогда
и не продолжен.
А это мы — скользим,
течем,
бежим.

Здесь предлагается один из поэтических вариантов интерпретации момента (времени). Достаточно момента, чтоб, например, утратить честь и счастье. Значит ли это, что момент имеет, хотя бы маленькую, протяженность? Нет, «не убавляем он, нерастяжим», и, значит, точка — более подходящая модель момента.

* * *

Стих о производной (из учительского фольклора)

В данной функции от икс, нареченной игреком,	$y = f(x)$
Вы фиксируете x, отмечая индексом.	x_0; $f(x_0)$
Придаете вы ему тотчас приращение,	$x_0 + \Delta x$
Тем у функции самой вызвав изменение.	$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
Приращений тех теперь взявши отношение,	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
Пробуждаете к нулю у Δx стремление.	
Предел такого отношенья вычисляется,	$\Delta x \to 0$
Он производною в науке называется.	$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

ВСЁ МОГУТ ... ЭВМ?

Нам говорят: безумец и фантаст.
Но, выйдя из зависимости грустной,
С годами мозг мыслителя искусный
Мыслителя искусного создаст.

И. Гете

В так называемую «официальную» часть школьного математического вечера («Огонька») непременно включаются краткие сообщения (доклады) по теме вечера, по волнующим молодежь «вечным» вопросам: профориентации, престижности и приоритета точных наук перед гуманитарными, возможности ЭВМ и кибернетики и т. д. Разумеется, эти сообщения должны быть не суховато-академичными, а живыми, эмоциональными, с хорошей «ассоциативной базой», значит, в частности, с привлечением поэзии, взволнованной теми же вопросами.

В ученических сообщениях о прикладной направленности математики, ее участии в научной организации производственных и других процессов следует отметить, что современная математика начинает заниматься и такими вопросами, которые, как говорит известный советский математик Е. С. Вентцель, «от века изучались лишь на гуманитарном уровне — конфликтные ситуации, иерархические отношения, дружба, согласие, авторитет и т. д. Появляются такие экзотические науки, как, например, «искусствометрия», «футурология», «информатика» и другие... Размывается и становится почти неуловимой грань между так называемыми «точными» и «гуманитарными» науками...»

При всем том у учащихся не должно возникнуть неверное представление о всеобъемлемости математики. Разъяснение этого вопроса в некоторых ситуациях уместно оживить сопоставлением соответствующих контрастных поэтических позиций.

Поэт Борис Слуцкий, автор известного стихотворения «Физики и лирики», возбудившего взволнованную дискуссию на эту тему, в другом стихотворении — «Ритмы» — явно забегает далеко вперед, утверждая:

Поэтому мера свойственна обществу,
И даже морю ритмично ропщется,
И все, что на небе, в душе, на земле,
Можно выразить в точном числе.

Может так и будет когда-то, но для настоящего времени все еще более истинны слова классика русской поэзии Гавриила Романовича Державина:

Измерить океан глубокий,
Сочесть пески, лучи планет
Хотя и мог бы ум высокий, —
Тебе числа и меры нет!

(«Тебе» — следует подразумевать: творческой, созидательной силе интеллекта. — *Б. К.*)

Общественный триумф математических наук бесспорен в наши дни. Но вот Байрон, например, его не предугадывал. Ему, наоборот, казалось, что:

Лишь мысли свет, не скованный числом,
Осветит тайны и достигнет правды.

В действительности же математические методы со все возрастающим успехом используются в познании тайн даже живой природы. Возможности кибернетики с ее быстро считающими «подсобниками» ЭВМ настолько универсальны, что «в умах людей возник образ «Электронного мозга», логически беспощадного, не склонного к эмоциям, лишенного жалости и снисходительности, присущей человеку, а потому существа устрашающего» (академик *М. А. Лаврентьев*).

Конечно, все, что творит человек «по правилам», например сочиняет музыку, стихи, может и робот-ЭВМ по тем же «правилам». Правила-то те же, а вот стихи и музыка, сочиненные машиной, как-то пока не впечатляют. Почему бы это? Серьезный и содержательный ответ на этот вопрос выражает в стихах ученый Василий Назаров в поэме

Тайна (отрывок)

В наш век ученый создает
Машины—роботы «с мышленьем».
Необычайной мысли взлет —
Такой, что оторопь берет
От своего произведенья.
Но зря грустят мои коллеги,
И композитор, и поэт.
Нет, робот не создаст элегий,
В его программе вальса нет.
Нет, этому не быть вовек,
И это, друг мой, не случайно,
Ведь для себя сам человек
Пока не познанная тайна.

Математик М. А. Лаврентьев полагает, что аппарат, имитирующий в каком-то отношении работу мозга человека, ценой больших усилий будет все же сделан, хотя априори неизвестна степень приближения подобной модели к оригиналу. И насколько такие модели сумеют приблизиться к истинному мышлению, сказать трудно. Даже в XX веке путь от предпосылок к реальности достаточно тернист и не всегда очевиден.

Во всяком случае, ЭВМ — это только вспомогательное техническое средство, но не источник математических знаний, которые становятся все менее формальными, сопрягаясь с человеком, с особенностями его мышления и его потребностями, даже духовными.

Ученическое сообщение на затронутую здесь тему хорошо «стыкуется» с беспокойно-призывными вопросами поэта Всеволода Рождественского в стихотворении без названия. Предлагаем его в отрывках, соединенных в одно целое.

О, трезвые умы, не знавшие сомнений,
Случалось вам хоть раз, хоть на единый миг
Отвлечься от своих привычных дел и книг,
Покинуть опыта истертые ступеньки?
О, трезвые умы, не знавшие сомнений?
Не грустно ль думать вам, что в мире все понятно,
Что больше нечего распутывать уму,
Что луч анализа, высвечивая тьму,
Прочтет и наших чувств размывчатые пятна?
Не грустно ль думать вам, что в мире все понятно?
Пускай останется извечный мир загадок,
Чтоб продолжалась жизнь, не ведая конца.
О, трезвые умы и строгие сердца,
Все чувства привести способные в порядок,
Пускай останется извечный мир загадок!

В математических методах нашего времени отчетливо заметна тенденция к сближению с методами наук гуманитарных. А нерешенных задач, по-видимому, всегда будет больше, чем решенных.

РАЗМЫШЛЕНИЯ, НАВЕЯННЫЕ МАТЕМАТИКОЙ

Да, путь познания не гладок.
Но знаем мы со школьных лет:
Загадок больше, чем разгадок,
И поискам предела нет!

Л. Татьяничева. Беспредельность

Размышления поэтов

В стихотворении о научном творчестве, оставшемся незаконченным, А. С. Пушкин дает такие определения случаю, опыту и гению:

«случай — изобретательный слепец»,
«опыт — сын ошибок трудных»,
«гений — парадоксов друг».

По словам академика С. И. Вавилова, это глубокие, меткие определения.

Расул Гамзатов. Таинственность (отрывки)

Таинственна несхожесть лиц,
И души многих поколений
Пленяет таинство страниц,
Которые оставил гений.
....
Нам страсть познания сладка.
Ее подвластны интересу,
Приподнимаем лишь слегка
Таинственности мы завесу.
Но в мире следствий и причин,
Спускаясь в тайные глубины,
Не смог добраться ни один
До истины, до сердцевины.

Дмитрий Кедрин. Задача

Мальчик жаловался, горько плача:
— В пять вопросов трудная задача!
Мама, я решить ее не в силах,
У меня и пальцы все в чернилах,
И в тетради места больше нету,
И число не сходится с ответом!
— Не печалься! — мама отвечала, —
Отдохни и все начни сначала! —
Жизнь поступит с мальчиком иначе:
В тысячу вопросов даст задачу.
Пусть хоть кровью сердце обольется, —
Все равно решать ее придется.

Если скажет он, что силы нету, —
Но ведь жизнь потребует ответа!
Времени она оставит мало,
Чтоб решать задачу ту сначала.

Эмиль Верхарн. **Числа (перевод В. Брюсова, отрывок)**

Я — обезумевший в лесу Предвечных Числ!
Как взоры пристальны их роковых проблем!
Предвечные, они — пред нами суть затем,
Чтоб в вечности пребыть такими ж!
От их всевластных рук вселенной не отымешь,
Они лежат на дне и в сущности вещей,
Нетленно проходя сквозь мириады дней.
Я — обезумевший в лесу Предвечных Числ!
Открою я глаза: их чудеса кругом!
Закрою я глаза: они во мне самом!
За кругом круг, в бессчетных сочетаньях
Они скользят в воспоминаньях.

Мир «Предвечных Числ», с его проблемами и методами как обобщенный образ математики в целом, околдовывает поэта чарующей красотой, но и подавляет своей огромностью и таинственной для него непонятностью.

Размышления ученых

(Нужны учителю для расширения собственного кругозора, для цитат, для плакатов в математических кабинетах и оформления математических «вечеров».)

— Слово «матема» первоначально означало «знание», «наука», но потом приобрело более узкий смысл *(М. Л. Картрайт)*.

* * *

— Вся глубина мысли, которая заложена в формулировку математических понятий, впоследствии раскрывается тем уменьем, с которым эти понятия используются *(Е. Вигнер)*.

* * *

— Математика владеет не только истиной, но и высшей красотой, холодной и суровой, подобной красоте скульптуры... *(Б. Рассел.)*

* * *

— Математик, так же как художник или поэт, создает узоры. И если эти узоры более устойчивы, то лишь потому, что они составлены из идей.

— Узоры математика, так же как узоры художника или поэта, должны быть прекрасны: идеи, так же как цвета или слова, должны гармонически соответствовать друг другу. Красота есть первое требование: в мире нет места для некрасивой математики.

— «Доказательство от противного», которое так любил Евклид, является едва ли не самым изящным оружием математика. Это намного более красивый прием, чем любой шахматный гамбит: шахматист, чтобы добиться успеха, может пожертвовать пешку или даже фигуру; математик же идет на риск проигрыша всей партии *(Г. Х. Харди)*.

* * *

— Математика есть прообраз красоты мира *(И. Кеплер)*.

* * *

— Математик должен быть поэтом в душе *(С. В. Ковалевская)*.

* * *

— Математический анализ можно в известном смысле назвать единой симфонией бесконечного *(Д. Гильберт.* «Основания геометрии»).

* * *

Слово «симметрия» обычно вызывает ассоциацию только с образами геометрически симметричных предметов. Но понятие симметрии в общем смысле связано с единством двух противоположных моментов — сохранения и изменения. Симметрия — это сохранение каких-либо элементов по отношению к определенным изменениям (Из книги *В. А. Черногоровой* «Загадки микромира», 1973).

* * *

— Симметрия, как бы широко или узко мы ни понимали это слово, есть идея, с помощью которой человек веками пытался объяснить и создать порядок, красоту и совершенство *(Г. Вейль)*.

* * *

— Цифры (числа) не управляют миром, но они показывают, как управляется мир *(И. Гете)*.

* * *

Сергей Георгиевич Лазо учился на физико-математическом факультете Московского университета (в начале 1916 г.). Но уже в июне 1916 г. был призван в армию. С той поры он отдал себя служению революции и Красной Армии.

Еще юношей Лазо писал в дневнике:

«Значение математики для умственного развития человека огромно, она дисциплинирует ум, приучает нас быстро разбираться в том или ином вопросе естествознания и жизни. В математике есть своя философия, своя поэзия. Она дает человеку силу мышления. К сожалению, я не обладаю особенными математическими знаниями. Я советовал бы каждому человеку в молодости посвящать три часа в день математике, независимо от его знаний. Пусть он полюбит математику, он тогда привыкнет к философии; естественные науки и техника будут ему легко даваться. Это на всю жизнь сделает его стойким, сильным духом... Большинство же отнекивается от математики просто из-за лени...»

ДУМЫ О ТВОРЦАХ МАТЕМАТИКИ И О НАС, УЧИТЕЛЯХ

Тропинка к истине сложна,
И потому в мышленье чистом
Отвага дерзкая нужна
Не менее, чем альпинистам.

Евг. Винокуров. «Мыслители»

Дмитрий Кедрин. **Архимед**

Нет, не всегда смешон и узок
Мудрец, глухой к делам земли:
Уже на рейде в Сиракузах
Стояли римлян корабли.
Над математиком курчавым
Солдат занес короткий нож,
А он на отмели песчаной
Окружность вписывал в чертеж.
Ах, если б смерть — лихую гостью —
Мне так же встретить повезло,
Как Архимед, чертивший тростью
В минуту гибели — число!

Классическим примером словесно-образного выражения математической формулы («Формулы рычага») является горделивое восклицание Архимеда: «Дайте мне точку опоры, и я сдвину Землю».

* * *

Вольтер. **Надпись к портрету Лейбница**

Весь мир его узнал по изданным трудам,
Был даже край родной с ним вынужден считаться;
Уроки мудрости давал он мудрецам,
Он был мудрее их: умел он сомневаться.

В. Брюсов. **К портрету Лейбница**

Когда вникаю я, как робкий ученик,
В твои спокойные, обдуманные строки,
Я знаю — ты со мной! Я вижу строгий лик,
Я чутко слушаю великие уроки.

О Лейбниц, о мудрец, создатель вещих книг!
Ты выше мира был, как древние пророки.
Твой век, дивясь тебе, пророчеств не постиг
И с лестью смешивал бездумные упреки.
Но ты не проклинал и, тайны от людей
Скрывая в символах, учил их, как детей.
Ты был их детских снов заботливый хранитель.
И после — буйный век глумился над тобой,
И долго ждал ты час, назначенный судьбой...
И вот теперь встаешь, как Властный, как Учитель!

В. Фирсов. **Н. И. Лобачевскому**

Высокий лоб, нахмуренные брови.
В холодной бронзе — отраженный луч...
Но, даже неподвижный и суровый,
Он, как живой, — спокоен и могуч.
Когда-то здесь, на площади широкой,
На этой вот казанской мостовой,
Задумчивый, неторопливый, строгий,
Он шел на лекции — великий и живой.
Пусть новых линий не начертят руки,
Он здесь стоит, взнесенный высоко,
Как утверждение бессмертья своего,
Как вечный символ торжества науки.

Владимир Михановский. **Пути параллелей (Страницы жизни великого геометра. Отрывки из поэмы)**

Восстание мысли

... Снасти ветхие рвет и ревет непогода.
Поспешая по белым снегам,
Наступает декабрь двадцать пятого года,
Кривотолков встревоженный гам,
Гнев, тревога, надежда, тоска, ожиданье...
Параллели рядов, параллели времен.
В Петербурге восстанье! Восстанье! Восстанье!
Розоватыми вспышками снег озарен.

Псов дорассветный лай. Душа изнемогла.
Отныне Николай вершит свои дела.
Оперся на штыки, заткнул России рот.
Одних — на рудники, других — на эшафот.
Вновь над Россией мгла в неверном постоянстве.
Такие вот дела в евклидовом пространстве.

Скоро порохом вспыхнет рассветная тишь.
Ты на четкий чертеж неотрывно глядишь.
После встал, потянулся устало,

Вечность тайну тебе нашептала,
И умом изумленным постигнул ты то,
Что доселе не знал и не ведал никто:
Параллели стрелою нацелены ввысь,
Параллели пронзают межзвездные дали.
Параллели — ты чуешь! — стремятся сойтись,
Только сразу такое постигнешь едва ли.
Гений, гений, просторы вселенной исчисли!
Это — тоже восстанье — восстание мысли.
... И все громче, как будто свершая обряд,
Ты, мол, разум утратил, — коллеги твердят.

— Чушь, — кричат, — Лобачевский, нелепица, бред.
Ничего смехотворней и в мире-то нет!
Параллели не встретятся — это же просто,
Как дорога от города и до погоста!
Ну хоть рельсы возьми: пересечься им, что ли,
Хоть сто лет рассекая раздольное поле?

Не понять им: коль к звездам протянутся рельсы, —
Окунутся с разбега в иные законы.
Там, где в нуль обращается зябнущий Цельсий,
Аксиомы пространства пока потаенны...

Сумерки гения

Где-то Волга блестит, зеленеют луга,
Разнотравьем шелковым манят берега,
Здесь же — мраком налит кабинет до краев.
Приговор катаракты бесстрастно суров.
Темнота подступает волной,
Нависает зловещей стеной.
Мир окрестный, геометр, ты больше не видишь.
О, как тьму бессердечную ты ненавидишь!
Жизнь — наощупь: вот книга, вот стол, вот перо,
Вот подсвечник — чеканенное серебро.

Прежде всех ты почуял — сквозь стылую млечность
Параллели, сливаясь, спешат в бесконечность.
Слишком рано... Других убедить ты не в силе.
И тебя осмеяли, при жизни забыли.
Просто видел ты дальше, чем видит иной.
Просто видел ты больше, чем видит любой.
... Все труднее шаги, все короче дыханье.
Паралич... И в простор отлетает душа.
В тот простор, где звезды путеводной мерцанье,
Где бегут параллели, столкнуться спеша ...

Диалог о Галуа

(Эварист Галуа (1811—1832) — один из величайших математиков всех времён и народов)

И сказал поэт...

Алексей Марков. **Галуа**

Заходил паренек в сюртучке небогатом,
Чтобы в лавке табак и мадеру купить.
Приглашала любезно, как младшего брата,
Разбитная хозяйка и впредь заходить.
Провожала до двери, вздыхая устало,
Вслед ему разводила руками: «Чудак!
На четыре сантима опять обсчитала,
А четыре сантима теперь не пустяк!
Кто-то мне наболтал, будто видный ученый,
Математик какой-то мосье Галуа.
Как же может открыть мировые законы
Эта вот, с позволенья сказать, голова?!»
Но всходил на мансарду обманутый ею,
Брал заветный набросок в чердачной пыли
И доказывал вновь с беспощадностью всею,
Что хозяева сытых желудков — нули.

И решился автор этой книги досказать ...

Добавить следует к тому, что сказано поэтом:
Да, Галуа республиканцем был — все верно это,
«Неистовым» — по прозвищу, опасным для «желудков сытых»,
Но в записях «заветных» им не были раскрыты
Законы политической борьбы. Их Галуа не знал.
В «заветных» записях он в тайну уравнений проникал:
Когда решений в радикалах нет, когда они все ж есть?
Ответ был найден в свойствах групп, — «групп Галуа», —
Как их назвали позже в его честь.
Трагична Галуа судьба. При жизни не был понят гений
Учеными. Труды не издавались. Ему шел двадцать первый год,
Когда на грязной и подстроенной дуэли его убил какой-то скот.
Минули годы ... И наступил триумф его прозрений:
Учение о группах — суть многих из наук теперь
И в эру НТР оно им приоткрыло дверь.
В учении о группах успехов алгебры секрет.
Об этом вот поэму надо бы сложить, поэт!

Олег Юрков. **Учитель**

Я помню вас, учитель математики,
Ваш долгий вздох из глубины души,

Походку, взгляд пронзительный, внимательный,
Как будто говорящий: «Дореши!»
Вы были сам Евклид, само пространство!
Тень Сиракуз вам на плечи легла!
Вы без труда доказывали равенство
И вычисляли градусы угла.
Теория в беседу превращалась,
Галактика летела по кривой,
Окно светилось, а доска вращалась,
Швыряя цифры книзу головой!
Ошибка исправлялась, так нелепа,
Биномы плыли, словно корабли.
А за окном скворцы просили хлеба,
Намокший снег клевали воробьи.
Коническая клумба возле школы
Сияла первозданной чернотой,
И алгеброй сраженные глаголы
Глотали дым за огненной чертой.
Давно ушли те годы, те проблемы,
Но этот дым я в сердце берегу.
Доказанные в детстве теоремы
До старости забыть я не смогу!

К ПРЕПОДАВАНИЮ МАТЕМАТИКИ СЛУЧАЙНОСТЕЙ

О математика анархии,
Как беспощаден твой расчет.

Юлиан Тувим

Для факультативного или самостоятельного овладения школьниками элементами теории вероятностей издано несколько книг. Одна из них — научно-популярная книга Б. А. Кордемского «Математика изучает случайности» (М., Просвещение, 1975).

А в этой книге вниманию учителя предлагаются несколько вводных в предмет замечаний, две изящно решенные задачи, полстраницы поэзии и два варианта шутки, иронизирующей над поверхностно-обывательским восприятием закономерностей математической статистики.

Математика случайностей — это вся наша жизнь: неорганическая, органическая и социальная. И это наука. И это — искусство, так как сама жизнь «есть искусство делать достаточные заключения из недостаточных предпосылок» (*С. Батлер*, английский прозаик конца XIX века). Недаром одной из самых ранних книг по теории вероятностей ее автором Я. Бернулли было дано название «Искусство предположений».

И еще интересно: однажды на страницах «Современника», издававшегося А. С. Пушкиным, появилась статья «О надежде», написанная князем П. Б. Козловским — дипломатом, глубоко образованным человеком. Это было первое в русской литературе популярное изложение основ теории вероятностей. Термин «вероятность» к тому времени еще не возник, и Козловский предлагал называть эту теорию «теорией удобосбытностей».

Теперь теория вероятностей — наука, помогающая из знания о наблюдаемых явлениях сделать достаточно достоверные выводы о явлениях ненаблюдаемых. Применять теорию вероятностей можно и нужно лишь при наличии необходимого запаса статистической информации. При этом крайней осторожности требует применение «принципа равновероятности». Когда-то считалась приемлемой, например, такая схема рассуждений относительно вероятностей исходов в опыте с бросанием монеты: если монета «симметрична» и мы не знаем, какая сторона выпадает чаще, то вероятность выпадения герба при единичном бросании монеты будет равна 1/2, так как у нас нет никаких оснований отдавать предпочтение какой-нибудь из сторон монеты.

Такое построение рассуждений ошибочно, как говорят, в зародыше. Если у нас нет сведений о явлении, то нет и оснований считать его равновероятным с другими аналогичными явлениями. Мы просто не знаем вероятности его осуществления.

Любопытно, что зачатки принципа равновероятности можно усмотреть уже у Демокрита, в учении которого существенную роль играл принцип исономии (буквально: равноправия). Древними авторами это понятие описывалось так: «Ничто не более такое, чем такое», «Не более так, чем иначе», «Почему скорее здесь и теперь, чем там и тогда». У Аристотеля: «Итак, какие из этих представлений истинны и какие ложны, неясно: ибо не более истинны те или иные, но все одинаково».

Слово «статистика» сначала поселилось в художественной литературе — в «Гамлете» (1602 г.) и «Цимбелине» (1610 г.) Шекспира, в «Возвращенном рае» Мильтона, (1710 г.) — от латинского status — состояние. В ранге научного термина оно вначале означало «учение об экономическом и политическом состоянии государства, основанное на анализе тех экономических факторов, которые выразимы количественно». Активная математизация статистики затем ввела ее в семейство математических наук, сохранив, однако, гуманитарность ее содержания: служение потребностям человека, когда «число» используется только как инструмент исследования.

Познание природы вероятности и статистических закономерностей неотделимо от привлечения категорий материалистической диалектики (случайность и необходимость, возможность и действительность и др.).

Здесь — бездна поводов к прямым контактам с поэзией: лирической и философской, к созданию «поэтикоматематики» — синтеза «земли и неба» (по Межелайтису). Вероятно, будет и синтез, а пока:

Дело учителя, где можно, — скомпоновать дуэт:
Своей мелодии дать поэтический эквивалент.

Скажем, к «мелодии»: «Статистические закономерности проявляются только в большой массе однородных случайных явлений...» пригоден «поэтический эквивалент»:

«Снежинки падали с небес
В таком случайном беспорядке,
А улеглись постелью гладкой
И строго окаймили лес».

(С. Маршак.)

* * *

В теории вероятностей эстетика всюду, в частности в содержании и решении задач — своего рода миниатюрных поэм в прозе. Вот две из многих:

Задача 1. Вероятность случая: $2 + 2 = 4$.

Образуется сумма из двух случайно взятых действительных чисел, каждое из которых принадлежит отрезку [1,5; 2,5].

Какова вероятность того, что эта сумма окажется в отрезке [3,5; 4,5]?

Решение. Каждую пару случайных слагаемых будем считать координатами точки (x, y). Геометрическая точка возникает как поэтический образ упорядоченной пары чисел. Принимая во внимание условие $1{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}5$, $1{,}5 \leqslant y \leqslant 2{,}5$, воображаем бесчисленное множество точек, наиплотнейшим образом втиснутых в квадратную ячейку плоскости, ограниченную прямыми $x = 1{,}5$, $x = 2{,}5$, $y = 1{,}5$, $y = 2{,}5$ (рис. 5).

Из координат случайно взятой точки составляется сумма: $x + y$ — случайное событие. В силу ограничений, наложенных на x и y, элементарным событием является сумма координат каждой из точек, сплошь заполняющих ячейку $ABCD$ (фигура Φ_1).

Хотя число точек, «порождающих» элементарные события $(x+y)$, бесконечно, но их «вместилищем» является фигура Φ_1 (квадрат $ABCD$), обладающая конечной площадью ($S_1 = 1$). Какая-то часть этого вместилища — фигуры Φ_1 — заполнена бесконечным множеством точек, олицетворяющих те из элементарных событий, которые подчинены требованию задачи: $3{,}5 \leqslant x + y \leqslant 4{,}5$. Соответствующие точки заполняют полосу, ограниченную прямыми $y = -x + 3{,}5$ и $y = -x + 4{,}5$ (фигура Φ_2). Заштрихованная на рисунке фигура Φ_3 есть $\Phi_1 \cap \Phi_2$. Фигура Φ_3, обладающая конечной площадью $S_3 = 0{,}75$, «вмещает» все точки, порождающие те элементарные события ($3{,}5 \leqslant x + y \leqslant 4{,}5$), вероятность которых требуется найти. В частности, точка M (2; 2), порождающая событие $2 + 2 = 4$, принадлежит фигуре S_3.

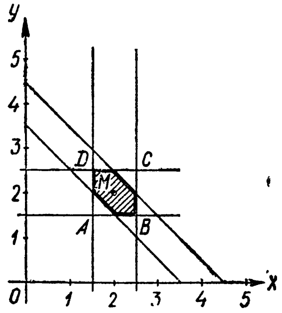


Рис. 5

Полагая элементарные события равновероятными, находим, что искомая вероятность

$$p = \frac{S_3}{S_1} = 0{,}75.$$

Задача 2. Сколько в семье детей?

В семье n детей, $n > 1$. Пусть событие A — «в семье не больше чем одна дочка», событие B — «не все дети одного пола».

Найти значение n, при котором A и B — независимые события.

Решение. $P(A) = \frac{n+1}{2^n}$, $P(B) = \frac{2^n-2}{2^n}$, $P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$. События A и B независимы, если и только если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, что эквивалентно уравнению $2^{n-1} - n - 1 = 0$. Единственное (n — натуральное) решение: $n = 3$.

Луи Ле Кенф. **Опровержение**

Случайно все — философ учит нас.
Случаен моего рожденья час,
Случайны век и место, где родился я,
И сам я только тень в пустыне бытия.
И небо из одной холодной пустоты,
И незачем к нему стремить свои мечты.
И жизнь — случайных дней слепая череда
Всего лишь навсего — дорога в никуда.
Мы встретились с тобой. И мне открылась тайна:
Я знаю, что ничто на свете не случайно.

(перевод с французского Н. Разговорова)

Если отнестись к этому стихотворению не только как к галантной шутке французского поэта, то придется признать, что не открылась поэту «тайна» (истина). Словно бы отвечая поэту, говорит академик Б. В. Гнеденко: «Отрицание случайного не может превратить случайное в необходимое, оно остается и играет центральную роль в познании окружающего нас мира».

* * *

«... Жизнь без начала и конца.
Нас всех подстерегает случай».

(Александр Блок)

Точный расчет (шутка)

— Я первый раз в жизни лечу на самолете! Скажите, это не очень опасно? Ведь мы можем попасть в катастрофу!

— О, это очень маловероятно. Из сорока тысяч пассажиров гибнет только один.

— Вы меня успокоили, мистер. Но откуда у вас такие точные сведения?

— Все очень просто. За страховку жизни на 40 000 долларов с меня взяли в аэропорту один доллар!

* * *

Выдающийся математик — методист Д. Пойа в книге «Математическое открытие» предлагает другой вариант шутки.

Осмотрев больного, врач сказал, нахмурившись: «О, у вас очень серьезная болезнь. Из десяти заболевших ею девять умирают».

Больной, конечно, расстроился.

— Но вам повезло, — добавил врач,—девять пациентов с этой болезнью у меня уже умерли. Радуйтесь: вы — тот десятый, который обязательно выживет!

В ОКРЕСТНОСТИ МАТЕМАТИКИ (ЮМОР)

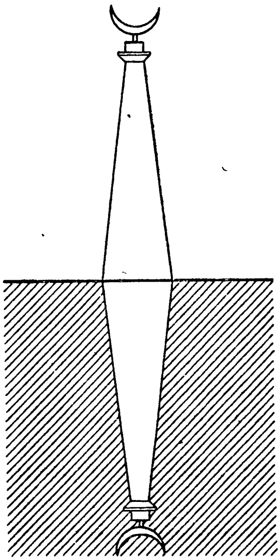
Жизнь не шутка. Но от шуток откажись —
И безжизненной тотчас же станет жизнь.

Ф. Носков

«Пантомима» в исполнении профессора

Такой своеобразный способ сообщения о своем открытии избрал профессор Коул (F. N. Cole) на заседании математического общества в Нью-Йорке в октябре 1903 г. Профессор подошел к доске и, не говоря ни слова, сначала перемножил два числа: 761838257287 и 193707721, затем вычислил значение выражения $2^{67} - 1$ и, указав на совпадение результатов, так и не проронив ни слова, под бурные аплодисменты «зрителей» сел на место.

Так Коул опроверг господствовавшую до этого почти 260 лет гипотезу о том, что число $2^{67} - 1$ простое.



Позже на вопрос, сколько времени потратил он на поиски доказательства, Коул отвечал: «Все воскресенья в течение трех лет».

Небезынтересно вспомнить, что близкое к этому числу $M_{61} = 2^{61} - 1$, предполагавшееся составным, оказалось простым числом. Доказательство было выполнено в 1833 г. русским любителем математики И. М. Первушиным.

Шутка об осевой симметрии

Однажды чужеземец, восхищенный красотой знаменитого бухарского минарета Калян, воскликнул:

— Как вы строите такие высокие минареты?

— Очень просто, — ответил ходжа Насреддин и, не преминув блеснуть своим обычным остроумием, пояснил: «Сначала выкапываем глубокий колодец, а потом выворачиваем его наизнанку».

* * *

«Непричесанные мысли» *Станислава Ежи Леца* **(с математическим смыслом юмора)**

1. Даже самый плоский человек, к сожалению, существует в трех измерениях.
2. Семейный круг не очертишь циркулем.

* * *

Николай Глазков. **Циркуль (шутка)**

Танцевальное вращенье
Совершеннейшей ноги,
И круги, круги, круги
Вызывали восхищенье.
Балерина создавала
Точный круг в один момент,
Подивился ей немало
Достославный геометр.
О прекрасной балерине
Вспоминал частенько он —
Не по этой ли причине
Циркуль был изобретен!

* * *

Сергей Погореловский. **Высшая математика**

В столярке работает четверо нас:
Беляев, Гуляев, Анютка, Тарас.
Вот как-то профорг заглянул на минутку:
— Кто ходит на лыжах?
— Тарас и Анютка.
— Кто плавать умеет?
— Анютка, Тарас.
— Кто в теннис играет?
— Они же как раз.
— Есть шахматисты?
— Беляев, Гуляев.
— Мотоциклисты?
— Гуляев, Беляев.
— Бывал ли в походе кто-либо из вас?
— Беляев, Гуляев, Анютка, Тарас.
Устроили наши ответы профорга,
Он все записал, не скрывая восторга.
А вскоре весьма и весьма озадачены,
Читали в стенновке мы рапорт такой:
«Пятнадцатью видами спорта охвачены
Все сорок рабочих у нас в мастерской!»

Хитрый геометр

Геометр берется начертить четыре окружности различной длины, сохраняя неизменным раствор циркуля. Догадайтесь как.

Р е ш е н и е. Вычерчивается окружность 1) на плоскости, 2) на шаре, 3) на конусе, центр — в вершине конуса. (Положить на бумагу шашку, утвердить на ней ножку циркуля.)

ПРОИСШЕСТВИЯ И ПРИКЛЮЧЕНИЯ НА ТРОПИНКАХ МАТЕМАТИКИ

Да, много решено загадок
От прадеда и до отца,
И нам с тобой продолжить надо
Тропу, которой нет конца.

В. Ноздрев

Участники и очевидцы утверждают, что все происходило в точном соответствии с их рассказами. Учитель, вовлеките своих учеников в логико-математическое расследование изложенных далее событий.

Как это случилось? Один отец передал своему сыну в его личную библиотеку 600 книг. Другой отец поступил так же и пополнил библиотеку своего сына, передав ему 400 книг. Когда оба сына составили каталоги полученных книг, то оказалось, что их совместный книжный фонд увеличился лишь на ... 600 книг! Как это случилось?

Чего больше: кофе или сливок? Завтракая каждое утро в кафе, я там познакомился с любопытным человеком. Он обладал способностью замечать и запоминать разнообразные числовые соотношения. Получая, например, на завтрак кофе, он уже знал, что в полной чашке — ровно 6 глотков.

Однажды утром, просматривая газету, Петр Петрович (так звали моего знакомого) торопливо сделал первый глоток кофе из наполненной чашки и, заметив, что кофе без сливок, попросил дополнить чашку сливками.

Следующие два глотка также не доставили удовлетворения Петру Петровичу; он попросил вновь дополнить чашку сливками. Теперь Петр Петрович отпил половину чашки кофе, вновь дополнил сливками и на этот раз выпил всю чашку кофе с удовольствием.

Сообщив эти количественные сведения, Петр Петрович потребовал от меня дать ответ на такой вопрос: чего он больше выпил — кофе или сливок?

Что ему ответить?

Однажды утром. В том же кафе, в ожидании заказанного мороженого, я заметил трех завтракающих. При этом двое из них ели сосиски, двое — винегрет, а двое — виноград. Тот, который не ел сосисок, не ел и винегрет. Тот, который не ел виноград, не ел и винегрет.

Что имел на завтрак каждый из них?

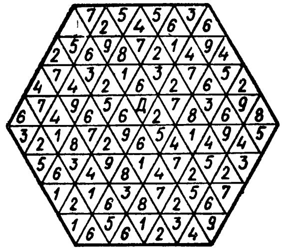


Рис. 6

Вечный скиталец. Так с горечью назвал себя очередной рассказчик и показал нам «маршрутную карту» своих скитаний. Его дом *(Д)* находится в центральном треугольнике нарисованного «плана местности» (рис. 6). Цифры, размещенные в остальных треугольниках, предписывают путнику, покидающему треугольник, сделать столько шагов, сколько указано в этом треугольнике (шагом называется переход в любой соседний треугольник через его сторону, но не через вершину). Так, войдя в треугольник с цифрой *4* (вверху «плана местности»), путник обязан далее сделать 4 шага — пройти, например, через треугольники *7*, *8*, *1* в треугольник с цифрой *2*; отсюда сделать 2 шага (например, в треугольники *1*, *6*) и так далее.

— С какого бы из периферийных треугольников я ни начинал маршрут, — жалуется рассказчик, — я никак не могу попасть в дом и остаться там. Почему?

Алгоритм сильнее случая. Действующее лицо следующего математического приключения — контролер. Вчера он разложил 90 доброкачественных деталей в 9 ящиков поровну и в отдельный ящик — 10 бракованных деталей. Эти 10 деталей оказались забракованными потому, что каждая из них весила 0,9 г, а любая доброкачественная весит 1 г. Ящики он не пометил и сегодня не может вспомнить, в котором из них лежат бракованные детали.

Придется взвешивать, причем поскорее: детали пора отправлять. Но взвешивать по одной детали из каждого наудачу выбранного ящика — надеяться на случайную удачу, а если не повезет, то придется делать 9 взвешиваний. Контролер обошелся одним взвешиванием. Каким образом?

Случай на конференции. Однажды на международной конференции, в перерыве, попытались было разговориться четыре делегата разных национальностей. Каждый умел говорить на двух языках: на родном и на языке одного из этой группы собеседников, но общего языка у всех четырех не оказалось. Чтобы не подсказать национальность, я укажу только первую букву фамилии каждого (в русской транскрипции): А, Б, В, Г.

Никто из них не владел сразу французским и немецким языками.

Трое имели общий язык, но этими тремя не были А, В и Г.

Б говорил по-немецки и мог разговаривать с В, хотя В ни слова не понимал по-немецки.

Когда А и Б хотели обменяться впечатлениями о конференции, то просили нашего делегата Г быть посредником-переводчиком; английского языка Г не знал.

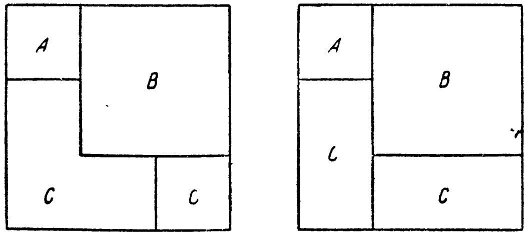


Рис. 7

Три языка упомянуты: английский, немецкий, французский, четвертым языком был русский. Определите, какими двумя языками владел каждый из четырех делегатов — А, Б, В и Г — и какой язык родной.

Три сестры, ковер и письмо. Три сестры-мастерицы получили премию — большой синтетический ковер, 3 м $\times$ 3 м = 9 м^2.

Младшая сестра предложила:

— Давайте я отрежу себе уголок «А» в 1 м^2, тогда из остального легко выкроить два равных квадратных коврика по любой из двух схем (рис. 7).

— Как видно, один коврик «В» выкроится целиком, а другой будет склеен из двух частей «С».

Средняя и старшая сестры сочли несправедливым такое разделение и настояли на перекраивании подаренного ковра в три отдельных равных коврика. При этом сестрам хотелось сохранить квадратную форму ковриков.

— Я припоминаю, — заметила старшая сестра, — в книге «Удивительный квадрат»* описан наиболее экономный способ перекраивания любого квадрата в три равных квадрата. Она воспроизвела чертеж раскроя (часть «А» образует один квадрат; второй квадрат составляется из двух частей «В» и третий — из трех частей «С»). Так ковер и перекроили в три равных квадратных коврика (рис. 8).

Вскоре, после того как этот эпизод был описан в газете, сестры получили интригующее письмо от одного знатного раскройщика:

— Дорогие мастерицы! И мне пришлось решать аналогичную задачу. Только у вас был ковер в 9 м^2, а у меня лист линолеума также в 9 м^2. Вам пришлось резать ковер на 6 частей, а я всего двумя разрезами раскроил линолеум на 4 куска, из которых составил 3 равных квадрата. При этом у меня, как и у вас, неиспользованных обрезков не было. В чем секрет моей удачи?

Как решил раскройщик свою задачу?

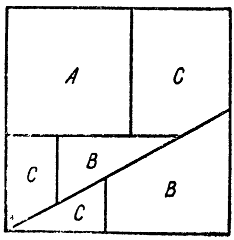
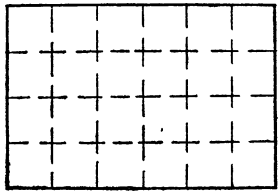


Рис. 8

* Б. А. Кордемский, Н. В. Русалев. Удивительный квадрат. Государственное изд-во технико-теоретической лит-ры. М.—Л., 1952.

Случай в автобусе. На начальной остановке в автобус, совершающий рейсы без кондуктора, вошли 5 пассажиров. Выяснилось, что ни у кого нет иных средств оплаты проезда, кроме монет достоинством в 10, 15 и 20 коп., а билет стоит 5 коп. Тем не менее каждому все же удалось оплатить проезд точно.



Определите, для какого наименьшего количества монет возможен такой случай и какие монеты оказались у каждого пассажира. Найдите решение такой же задачи для любого числа пассажиров, большего чем 5.

Рамка для картины. Произведения абстракционистов, представленные на одной из зарубежных выставок в Москве, с предельной ясностью показали, что, для того чтобы написать картину, не требуется ни таланта, ни специального образования, достаточно иметь немного воображения.

С поразительной быстротой мне удалось создать свой первый шедевр — «Море». Из второго листа такого же размера я прошу вас изготовить рамку шириной в одну клетку, полностью окаймляющую мою картину. Для этого надо разрезать лист по указанным пунктирным линиям на 4 «уголка».

В музее часов. Да, да, есть и такой музей. Часов там много всяких: старинных и современных, механических и электрических, огромных и крошечных, с боем и без боя, с циферблатом и без циферблата.

Более 1000 лет назад были изобретены первые механические часы. Часы очень долго имели лишь одну стрелку — часовую. Только с 1700 года появилась на часах и минутная стрелка, а еще через 60 лет — секундная.

400 лет часы приводятся в действие пружиной. А вот современные наручные электронно-механические часы совсем и заводить не надо. Крошечный сухой элемент в полтора вольта способен двигать стрелки часов целый год без остановок. Через год смени батарейку или старую подзаряди и снова год носи часы, не думая о заводе.

Еще удивительнее часы, для действия которых достаточна энергия дневного света или света 16-ваттной электролампочки.

В числе тикающих и безмолвствующих обитателей музея были двое действующих часов с боем, одинаковым по тембру. Однажды они ударили подряд, как я насчитал, 19 раз. Это произошло потому, что начало боя на первых часах опоздало по отношению ко вторым часам на 2 с. Кроме того, первые часы, оказывается, ударяли через каждые 3 с, а вторые — через 4 с.

Который был час?

В лекционном зале больницы. В лекционном зале больницы находилось 35 человек: врачи, сестры и несколько выздоровевших, уже сменивших больничные пижамы на пиджаки и брюки. Сестер в зале было больше, чем выздоровевших, а врачей было в 5 раз больше, чем женщин.

Сколько человек каждой категории находилось в зале? (Условие задачи допускает единственный ответ.)

Доярка и журналисты. В перерыве между заседаниями зонального совещания доярка Фаина Котикова рассказала журналистам о повседневных сторонах своей деятельности. Однако на вопрос о том, сколько коров она выдаивает, Фаина не дала прямого ответа, а предложила угадать.

Каждый из шести собеседников высказал по одному предположению: 37, 50, 47, 53, 40, 30.

— Никто не угадал, — рассмеялась Фаина, — но вы сами найдете точный ответ на свой вопрос, если я скажу, что кто-то из вас ошибся на 6, кто-то — на 11, остальные — на 9, на 1, на 12 и на 4.

Убедившись в том, что здесь не обойтись без арифметических подсчетов, журналисты и вас приглашают вместе с ними принять участие в решении задачи Фаины Котиковой.

В самом деле, сколько коров она обслуживает?

Сколько сыновей и внуков? Я присел на скамейку рядом с двумя стариками и слышу, как один говорит другому: «У каждого из моих сыновей столько же сыновей, сколько у меня, а потому число моих внуков превышает пятьдесят, но все же меньше восьмидесяти. Смекни-ка, сколько всех сыновей в этой компании?

Сначала мне показалось, что информация недостаточна для точного ответа, но, подумав, понял, что ошибался. Задача оказалась разрешимой. Как надо рассуждать?

Загадочные указатели расстояний. Вдоль дорог обычно бывают расставлены указатели расстояний от некоторого начального пункта до данного места (раньше их называли верстовыми столбами). Поезд, в котором я ехал, долго, долго шел равномерно без остановок (с постоянной скоростью). Через окно вагона я заметил указатель расстояния с двузначным числом. Ровно через час промелькнул второй указатель. Число было опять двузначное, записанное теми же цифрами, что и в первый раз, но в обратном порядке. Еще через час на указателе расстояний появилось трехзначное число. Крайние цифры совпали с цифрами первого указателя, а средней цифрой оказался 0.

Какие числа я заметил на указателях и с какой скоростью шел поезд на этом участке пути?

Четыре семьи за одним столом. Когда четыре учительские семьи собирались на праздниках вместе, то за круглым обеденным столом усаживались 12 человек. Каждая семья состояла из мужа, жены и одного ребенка. Хозяйке дома доставляло удовольствие размещать всех за столом так, что каждый мужчина находился между женщиной и ребенком, каждая женщина — между мужчиной и ребенком, каждый ребенок — между женщиной и мужчиной и нигде члены одной семьи не оказывались сидящими рядом. Хозяйка не только удачно справлялась с этой задачей, но всякий раз находила новую комбинацию такого размещения.

Сын хозяйки дома — школьник — утверждает, что у мамы огромный выбор вариантов, так как, по его подсчетам, существует 5040 перестановок, удовлетворяющих условию. Верно ли это?

Задача с изюминкой. Кладу 1 г на левую чашку весов, 2 г — на правую, 3 г — вновь на левую, 4 г — на правую и т. д. до 100 г включительно. На сколько граммов превысит груз на правой чашке весов? «Изюминка» этой задачи в том, чтобы найти кратчайшее решение.

Почему у Вали он бывает чаще? Через станцию «Спутник» между $12^{\underline{10}}$ и $14^{\underline{00}}$ проходят пригородные поезда регулярно через каждые 10 мин в северном направлении и также регулярно через каждые 10 мин в южном направлении, причем «южный» поезд приходил на платформу регулярно через 2 мин после прихода «северного» поезда.

Студент Многогранкин летом жил вблизи этой станции. Регулярно три раза в неделю он ездил поездом либо к однокурснику Вале в северном направлении, либо к однокурснику Толе в южном.

Юноша выбирал наугад какой-либо момент после полудня, шел к платформе и садился в тот поезд, который прибывал первым. Он предполагал, что таким образом за лето количество поездок к Вале и Толе будет приблизительно одинаковым. В действительности же оказалось, что к Вале он попадает чаще — в среднем 4 раза из 5. Чем это объясняется?

История одного занятного конкурса. Редактор «Электроники» — так называлась многотиражка одного крупного предприятия — обратился к директору с просьбой разрешить провести среди читателей газеты конкурс на «острый глаз» и выделить некоторую ссуду на премии победителям.

— Что вы имеете в виду? — поинтересовался директор.

— Мы подготовим 50 принципиальных схем наших изделий, незначительно отличающихся одна от другой, и по одной копии каждой схемы. Получится 50 пар схем-близнецов. Тщательно их перетасуем и начнем помещать в газете, в каждом номере, скажем, по 5—6 схем.

Расскажем читателям «Электроники» о конкурсе и обратимся с таким предложением:

«Вырезайте схемы из газеты и храните. Когда подберете 100 схем, рассмотрите их внимательно и к каждой схеме подыщите ее копию. Все подобранные пары схем-близнецов передайте редакции газеты. Принимать будем только полный комплект из 50 пар.

Через неделю после окончания печатания схем мы опубликуем фамилии тех, у кого в комплекте переданных нам схем окажется больше правильно подобранных пар».

— Ну что ж, действуйте, — одобрил директор — дадим и небольшие премии победителям.

Правильно рассортировать на одинаковые пары сотню схем, мало отличающихся одна от другой, — нелегкая задача, и не удивительно, что у 98,1% от числа приславших решения оказалось по 4 и больше неправильно подобранных пар.

Число участников конкурса, неправильно подобравших только 3 пары, на 18 больше числа участников, неправильно подобравших только 1 пару.

Участников конкурса, неправильно подобравших только 2 пары, оказалось ровно столько же, сколько тех, кто все 50 пар скомплектовал правильно.

Для завершения рассказа об истории конкурса следовало бы сообщить, сколько человек приняло участие в конкурсе и сколько оказалось победителей. Надо поразмыслить и посчитать. Несомненно, вы это и сделаете.

Дополнительно сообщим, что тираж газеты «Электроника» обычно не превышает 3000 экземпляров.

Восстановление события. В одном из узлов автоматической линии помещается интересный механизм—«промежуточный бункер».

По ходу производственного процесса бункер либо пополняется деталями, либо выдает их на поток.

При этом здесь нет какой-либо постоянной последовательности в пополнении и выдаче деталей: после пополнения может последовать выдача, а может последовать подряд несколько пополнений или выдач.

Механизм после включения действует так, что при первом импульсе бункер получает 1 деталь, если зажигается зеленая лампочка, или выдает 1 деталь, если зажигается красная лампочка. При втором импульсе он получает или выдает 2 детали, опять-таки в соответствии с тем, зажигается ли зеленая лампочка или красная. При третьем импульсе запас деталей в бункере изменяется на 4 детали в сторону увеличения или уменьшения, при четвертом — на 8 и т. д.

Таким образом, независимо от того, возникает ли импульс пополнения или импульс убыли, порция изменения количества деталей удваивается с каждым последующим импульсом. Цикл удвоения заканчивается на десятом импульсе, после чего изменение запаса деталей в бункере происходит опять в такой же последовательности: ± 1, ± 2, ± 4, ± 8, ...

Однажды в бункере находилась 601 деталь. Включили механизм. И вот на некотором импульсе бункер выдал полагающуюся порцию деталей и... оказался пустым. Определите, на каком импульсе опустел бункер, и восстановите картину последовательности импульсов в этом случае, т. е. установите, прибавилась или убавилась деталь в бункере при первом импульсе, прибавились или убавились 2 детали при втором импульсе и т. д.

Сколько раз зажигалась красная лампочка в рассмотренном случае?

Во всем нужна сноровка... Казалось бы немудреное дело было мне поручено — определять толщину изготовленных валиков с помощью стальной калибровочной плиты.

В этой плите высверлено 15 отверстий разных диаметров. Диаметр первого отверстия 10 мм, каждого последующего — на 0,04 мм больше. Пытаясь вставлять валик в разные отверстия, надо в конце концов найти такие два соседних отверстия, что в одно из них валик вставляется, а в другое нет. На этом процесс измерения заканчивается и калибр валика считается установленным. Если, например, в отверстие диаметром 10,16 мм валик вставляется, а в соседнее отверстие, диаметр которого 10,12 мм, валик не вставляется, то его калибр 10,12 — 10,16 мм.

Валики тоньше 10 мм и толще 10,56 мм отбрасываются.

Посмотрели бы вы, как неразумно и суматошно я оперировал! Пробовал вставлять валик подряд во все отверстия или пытался сначала на глаз определить возможный калибр — все равно затрачивал гораздо больше времени, чем мой «напарник», пожилой и опытный рабочий — Николай Тимофеевич.

Наблюдая ритмичные и планомерные действия Николая Тимофеевича, я заметил, что разные валики он пробовал на разных отверстиях, но количество проб у него для любого валика оказывалось одинаковым, и это больше всего меня поразило.

— Обучите меня своей системе испытаний валиков, — попросил я Николая Тимофеевича.

— Да, это наиболее экономная система проб. Понаблюдай еще немного и сам поймешь, — ответил мне мастер.

А вы сообразили, сколько проб измерений делает Николай Тимофеевич для калибровки каждого валика и какова очередность проб?

«Арарат» — «Кайрат» — с каким счетом? Состоялось 15 игр между шестью футбольными командами (каждая команда встречалась с каждой из остальных по одному разу). Ничьих не было и одинаковых результатов не было. Ни одна из команд не взяла ворота противника более шести раз в каждой игре. При этом сумма очков (гол — очко), приобретенных всеми командами в 15 играх, оказалась минимально возможной.

Команда, занявшая первое место, победила во всех встречах с наибольшим возможным выигрышем числа очков в каждой встрече.

Команда, занявшая второе место, проиграла только команде, занявшей первое место, в остальных встречах она победила с наибольшим возможным выигрышем числа очков в каждой встрече.

Команда, занявшая третье место, проиграла только командам, занявшим первое и второе места, в остальных встречах победила с наибольшим возможным выигрышем числа очков в каждой встрече. И т. д.

«Заря» победила «Пахтакор» со счетом 1—0. Команда «Пахта-

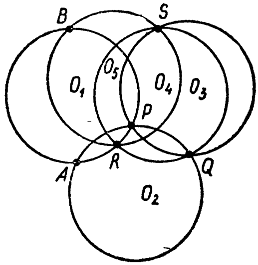


Рис. 9

кор» проиграла команде «Кайрат». «Нефтчи» три раза взяла ворота команды «Арарат» и только один раз — ворота команды ЦСКА.

Сообщенных сведений вполне достаточно, чтобы сказать точно, какая команда заняла первое место и с каким счетом окончилась игра команды «Арарат» против команды «Кайрат».

Черная или рыжая? 4 коровы черной масти и 3 — рыжей масти за 5 дней дали такой же надой молока, как 3 коровы черной масти и 5 рыжей за 4 дня. Какие коровы более молочны — черной или рыжей масти?

Пятак в руках находчивого ученика. Вот что приключилось однажды на уроке геометрии. Учитель предложил задачу «на построение». Нарисована окружность (ее центр не указан), на которой отмечена точка A. Требуется найти диаметрально противоположную точку B.

— У меня нет циркуля, — заявил ученик. — Можно, я воспользуюсь пятаком?

Учитель позволил, но потребовал дать обоснованное решение. В результате глубоких размышлений ученик с помощью пятака:

1) построил окружность O_1 и отметил на ней произвольную точку A (рис. 9);

2) построил окружность O_2, пересекающую окружность O_1 в точке A и в какой-то точке P;

3) через точку P провел окружность O_3, пересекающую O_2 в какой-либо точке Q;

4) через точку Q провел окружность O_4, пересекающую O_1 в какой-либо точке R, а окружность O_3 в какой-либо точке S;

5) приложил пятак к точкам R и S так, чтобы проведенная с помощью пятака окружность O_5 прошла через эти точки; пересечение окружностей O_5 и O_1 дало искомую точку B.

При обосновании построения ученик отметил, что если равные окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках M и N, то O_1MO_2N — ромб.

Дома, пользуясь тем же пятаком, ученик

а) построил окружность, касающуюся заданной «пятачковой» окружности в произвольно выбранной на ней точке;

б) при заданном луче OA построил точку B, принадлежащую воображаемому лучу OB, составляющему с лучом OA угол 30°.

Проверьте все это.

Сколько лет сыновьям? Встретились два старых школьных приятеля — Б. и Н.

Б.: Здравствуй, как жизнь?

Н.: Течет понемножку. Уже тремя сыновьями обзавелся.

Б.: Сколько лет им?

Н.: Нетрудно определить: произведение всех возрастов — 36, а сумма возрастов равна числу окон в доме напротив.

Б. (подумав): Этого еще недостаточно.

Н.: Кроме того, старший сын весь в меня.

Б.: Теперь ясно. Что ж ты сразу не сказал об этом?

Определите возраст сыновей.

Семья чудаков

Рыбак. Через блок, подвешенный к пружинным весам, перекинута бечевка. К одному концу бечевки привязан сом; второй конец бечевки прикреплен к полу. Таким способом чудак-рыбак пытается убедить нас в том, что выловленный им сом весит 15 кг, как это и показывает стрелка весов.

Показания весов, конечно, не опровергнешь, но сом этот ведь намного легче, не так ли?

Кулинарка. До полной готовности пирога осталась последняя операция — поставить его в «духовку» ровно на 9 мин. Как нашей кулинарке отсчитать требуемые минуты, если она (чудачка!) не признает иных часов, кроме «песочных»? В ее распоряжении находятся «малые» и «большие» часы, при опрокидывании которых песок пересыпается из верхней колбочки в нижнюю — первоначально пустую — ровно 4 мин и 7 мин соответственно. Никаких «делений» такие часы не имеют.

Программист. Математик-программист принес домой 5 дынь, имеющих неразличимые на взгляд размеры. Вспомнив, что в числе купленных дынь нет даже двух одинаковой массы, чудак-программист решил расположить их в порядке убывающих тяжестей. Он взял двухчашечные весы старого образца — без гирь (домашние ЭВМ еще не появились) — и задумался над составлением «оптимальной» программы своих действий (программист и дома программист!). Оказалось, что даже при самых «невезучих» ситуациях возможно упорядочить расположение дынь не более чем в 7 операций сравнения их масс. Как надо действовать?

Школьник. В его тетради построена некоторая фигура так, что каждый из шести отрезков, образующих фигуру, пересекается с каждым другим, но никакие три не пересекаются в одной точке. Выполняя задание учителя, школьник, сбиваясь и путаясь, начиная снова и снова, усердно пытается подсчитать, сколько треугольников содержится в начерченной фигуре. Чудак! Непосредственный подсчет ненадежен и неразумен.

Любая фигура, удовлетворяющая указанным условиям, содержит одно и то же количество треугольников, и число их можно установить, не вычерчивая фигуры. Рассуждай!

Капитан и его сын. Это был новогодний сюрприз, присланный капитаном дальнего плавания своему сыну, — шкатулка, которая открывается только после того, как с помощью шести дисков с полным комплектом цифр на каждом будет набрано некоторое кодовое шестизначное число вида ****0*. Пятая цифра известна — нуль, а все остальные цифры зашифрованы звездочками.

В сопроводительном письме сыну капитан написал: «...Кодовое число одновременно указывает и величину содержимого (в рублях) шкатулки. Возьми себе $\frac{1}{**}$ часть денег на книги и каникулярные развлечения, а остальные отдай маме на хозяйственные расходы. Когда содержимое шкатулки (число ****0*) будешь делить на знаменатель указанной дроби (**), то в частном получишь четырехзначное число, а процесс деления будет иметь такой вид:

$$
\begin{array}{r|l}
****0* & ** \\ \cline{2-2}
\underline{**} & **** \\
**0 & \\
\underline{**1} & \\
** & \\
\underline{2*} & \\
0 &
\end{array}
$$

Если проявишь находчивость и остроумие, то, расшифровав указанную операцию деления, найдешь и кодовое число, открывающее шкатулку...»

Все одноклассники сына капитана дальнего плавания включились в поиски «изюминки», заложенной веселым капитаном в задачу. Пока, увы, безуспешно. Более того, многие пришли к заключению о неправильности в записи действий. Некоторые, впрочем, полагали, что «изюминка» — в преднамеренно допущенной описке, которую и надо выявить. Например, не лишний ли «хвостик» у двойки? Если его убрать, то на месте двойки окажется девятка, и тогда удается найти даже два решения. Одно из них — (1). Какое второе?

$$
\begin{array}{r|l}
101409 & 33 \\ \cline{2-2}
\underline{99} & 3073 \\
240 & \\
\underline{231} & \\
99 & \\
\underline{99} & \\
0 &
\end{array}
\qquad (1)
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
****,* & ** \\ \cline{2-2}
\underline{**} & ***,* \\
*** & \\
\underline{**1} & \\
** & \\
\underline{2*} & \\
0 &
\end{array}
\qquad (2)
$$

Другая версия «описки» исходила из предположения, что нуль в качестве пятой цифры нужен только для набора кодового числа, в действительности он маскирует запятую в записи числа. Если этот нуль в записи делимого заменить запятой, а оставшиеся звездочки сблизить, то получится деление десятичной дроби на целое число и запись действий примет вид (2).

Сторонники этой версии нашли два варианта расшифровки приведенной записи. Какие?

К сожалению, ни одно из четырех решений, найденных ребятами, не открыло шкатулки.

В посылке капитана был еще один листок. Капитан писал сыну, что их штурман, который, кстати, помог сделать шкатулку, показывает своим товарищам забавный «числовой фокус»: он четыре раза складывает одинаковые числа и каждый раз получает новый результат:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}267\\267\\\hline 534\end{array} \qquad +\begin{array}{r}267\\267\\\hline 545\end{array} \qquad +\begin{array}{r}267\\267\\\hline 556\end{array} \qquad +\begin{array}{r}267\\267\\\hline 512\end{array}\end{array}$$

При этом штурман клянется, что суммы найдены честно и безошибочно. Весь класс до сих пор не раскрыл секрет этого фокуса и задачи капитана. Вам удалось?

Кладовщик. В кладовой на полке стоят 11 одинаковых коробок, содержащих по одинаковому количеству n одних и тех же деталей, $n > 10$. В каждой из 10 коробок все детали стандартные, одинаковые по массе, а в одной коробке все детали тоже одинаковые по массе, но нестандартные.

Потребовали у кладовщика коробку с нестандартными деталями, а он никак не может вспомнить, в которой из 11 коробок находятся нестандартные детали, а также немного тяжелее они или немного легче стандартных. Вышел из затруднительного положения кладовщик при помощи всего лишь двух взвешиваний на чашечных весах без гирь, но со стрелкой и шкалой с делениями. Он вспомнил, что, когда клал стандартную деталь на одну чашку весов, а любую нестандартную — на другую чашку, стрелка отклонялась ровно на одно деление.

Кладовщик мог вынимать детали из любой коробки, так как все коробки открыты и на чашки весов, если потребуется, можно ставить сразу несколько коробок с деталями.

Рассуждения и действия чудака-кладовщика по отысканию коробки с нестандартными деталями были также нестандартны.

Восстановите ход его мысли и способ взвешивания.

«Логик»

Его хобби — коллекционирование парадоксов, софизмов, так сказать «кажущихся возможностей» и своего рода антисофизмов — «кажущихся невозможностей». То и другое суть высказывания, подталкивающие ваши размышления к незамечаемой потере обязательных «самоограничений», либо, наоборот, наталкивающие на «самоограничение» — некую психологическую инерционность.

Многое из его коллекции знакомо, вероятно, каждому учителю математики. Поэтому ограничимся демонстрацией немногих экспонатов из коллекции этого чудака.

Софизм: $0 = 1$ [Для учащихся: $(uv)' = u \cdot v' + v \cdot u' \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow u \cdot v' = (u \cdot v)' - v \cdot u'.] \qquad (*)$$

Справедливо утверждение: если F есть первообразная для $(uv)'$ (тогда $F = u \cdot v$), а G — первообразная для $v \cdot u'$, то $F - G$ есть первообразная для $(uv)' - v \cdot u'$ (для правой части (*).

Пусть I — первообразная для функции uv' (для левой части равенства (*)). Теперь «провоцируем» учащихся согласиться (и они обычно, под влиянием собственной психологической инерционности, даже сами приходят к нужному для софизма заключению), что

$$I = F - G. \qquad (**)$$

Предлагаем использовать это равенство, полагая $u = e^{-x}$ и $v = e^x$. Имеем: $u' = -e^{-x}$ и $v' = e^x$. Тогда $u \cdot v' = e^{-x} \cdot e^x$, $u \cdot v = e^{-x} \cdot e^x = F$, $v \cdot u' = e^x \cdot (-e^{-x}) = -e^x \cdot e^{-x} = -u \cdot v'$.

Теперь видно, что если I — первообразная для $u \cdot v'$, а G — первообразная для $v \cdot u'$, то $G = -I$. Подставляя в (**), получаем: $I = e^{-x}e^x - (-I) \Longrightarrow 0 = 1$.

«Малярный» парадокс. Пусть $y = \frac{1}{x}$. Если $x \in [1; x]$, то площадь соответствующей криволинейной трапеции $S(x) = \int\limits_1^x \frac{dx}{x} = \ln x$. Если мы стали бы закрашивать «всю» ($x \to \infty$) криволинейную трапецию, применяя бесконечно утончающуюся кисточку, то этот процесс не закончился бы никогда, так как закрашиваемая фигура бесконечна и ее площадь не выражаема числом:

$$S = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{x \to \infty} \int\limits_1^x \frac{dx}{x} = \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty.$$

Но удивительное — дальше. Вращая эту бесконечную фигуру вокруг оси Ox, получим некоторое «тело вращения», но уже обладающее конечной емкостью. Действительно,

$$v = \pi \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \pi \lim_{x \to \infty} \int\limits_1^x \frac{dx}{x^2} = \pi \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right) = \pi.$$

Парадокс! На окраску осевого сечения рассматриваемого тела надо потратить бесконечное количество краски, а чтобы наполнить краской это тело, содержащее внутри себя и полностью окружающее свое осевое сечение, достаточно всего лишь ровно π куб. единиц краски (см. в «Ответах» разоблачение парадокса).

Логическая задача. Однажды Бертран Рассел охарактеризовал математику, как «предмет, в котором мы никогда не знаем, о чем говорим, и верно ли то, что мы говорим» ("...the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true").

В аккорд к этому причудливому определению наш «логик» придумал столь же причудливо-затейную абстрактно-логическую задачу (он и этим видом задач интересуется).

Пусть A, B, C, D — некие символы. Требуется под каждым из них подписать один тождественный ему символ: X или Y или Z или W, исходя из следующих предположений:

если A не есть X, тогда C не есть Y,
если B есть либо Y, либо Z, тогда A есть X,
если C не есть W, тогда B есть Z,
если D есть Y, тогда B не есть X,
если D не есть X, тогда B есть X.

Первоначальный импульс: «Это невозможно!». Ан нет! Подумай, а потом смотри ответ!

1) Пересечь четырехугольник отрезком прямой так, чтобы образовалось четыре треугольника.

2) Могут ли увидеть друг друга два барана, не поворачивая головы, если они стоят рядом один головой к северу, другой — к югу?

3) Может быть, все-таки возможно четырех щенков раздать трем ребятам так, чтобы никто не получил больше чем остальные?

4) Охотники рассказали: «К широкой реке мы подошли вчетвером. У причала стояла только одна лодка, вмещающая не более двух человек. Однако же все мы переправились через реку на этой лодке без посторонней помощи и продолжили свой путь, причем лодка была оставлена у того же причала».

Примем это за выдумку («охотничий рассказ»), или попытаемся открыть «секрет» переправы, осуществленной четырьмя охотниками?

СКАЗКИ, ФАНТАЗИИ...

Горят причудливо краски,
И, как ни мудра голова,
Вы все-таки верьте сказке,
Сказка всегда права!

Э. Асадов

Поможем Золушке. Сказочные короли, черти, бабы-яги и прочие злодеи неистощимы в придумывании разнообразных преград и препятствий на дорогах, ведущих к счастью. Герою приходится проявлять находчивость и храбрость, выбирать на перекрестке лучшую из трех дорог, строить дворцы за одну ночь, улаживать закоренелые конфликты, быть арбитром в спорах, искать наилучшие решения хитроумных загадок и задач, подчас действительно нелепых и из-за этого кажущихся неразрешимыми.

Так случилось и в этой сказке.

— Мы пойдем на бал, — сказала Золушке мачеха и злорадно добавила:

— Оставляю тебе бочонок с виноградным соком, 24 л, и три пустых круглых открытых банки (без делений) вместимостью 10, 11 и 13 л. Не пользуясь никакими мерками, ты должна влить из бочонка в каждую банку ровно по 8 л сока. Когда вернемся с бала, я проверю.

— Впрочем, можешь прийти посмотреть, как мы танцуем, если быстро и достаточно аккуратно выполнишь задание.

Юноши и девушки, неужели мы оставим Золушку без поддержки? Она очень сообразительная девушка, но вряд ли училась в школе, а на фею теперь надежда плохая.

Продолжение сказки. Остроумный выход из затруднительного положения радует, восхищает любого человека с чистым сердцем и ясным взглядом. Совсем другая реакция у бюрократа или злобствующего обывателя.

Не похвалила и не поблагодарила мачеха ни Золушку за точное выполнение задания, ни нас за дружескую выручку Золушки, слила весь сок обратно в бочонок и потребовала вновь разлить эти же 24 л сока в три неодинаковых посудины так, чтобы в каждой оказалось по 8 л. Одну открытую круглую банку в 11 л она оставила, а другие две заменила тоже круглыми банками такой же вместимости в 10 и 13 л, но сделанными из легкого, непрозрачного синтетического материала. Эти две банки были наглухо закрыты крышками, в которых имелись лишь небольшие отверстия.

Итак, друзья, Золушка вновь оказалась в трудном положении. Ищите выход!

Проделки черта под Новый год. Мифический бес во времена Гоголя частенько вмешивался в людские дела. Теперь это, по-видимому, происходит реже, но чего не случается в канун Нового года!

На этот раз бес попутал кассира сберегательной кассы, который выдал одному вкладчику рубли в таком количестве, в каком следовало выдать копейки, а копейки в таком количестве, в каком следовало выдать рубли. Гражданин, а это был студент, брал скромную сумму, поэтому (а может быть потому, что торопился), не проверяя, положил в карман полученные деньги и вышел из помещения сберегательной кассы.

Израсходовав 5 к на покупку газет, он тут же сразу обнаружил, что у него осталось денег вдвое больше того количества, которое он должен был получить от кассира (других денег, кроме полученных, он не имел ни копейки). Студент, разумеется, немедленно вернул излишек кассиру.

Установите, сколько рублей и копеек должен был он получить.

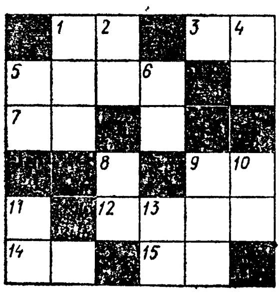


Рис. 10

Кросс чисел. Случайный свидетель происшествия, описанного в предыдущей миниатюре, получив некоторые отрывочные сведения об этом студенте и его семье, изложил их в следующей загадочной форме, похожей на кроссворд, где свободные клетки надо заполнить не словами, а числами (рис. 10).

По горизонтали:

1. Простое число. Если цифры обменять местами, то опять будет простое число.
3. Возраст его отца, когда самому студенту было 11 лет.
5. Год его рождения.
7. См. № 1 по горизонтали.
9. 2/5 возраста его отца (в настоящее время).
12. Квадрат возраста отца.
14. Число всех пар (x, y) решений в целых числах уравнения $x^2 + y^2 = 65$. Подскажу, что все целые числа, удовлетворяющие этому уравнению, однозначные.
15. Сумма цифр числа № 5 по горизонтали.

По вертикали (сверху вниз):

1. Расстояние в километрах по железной дороге от Москвы до большого приволжского города, в котором он жил. Какой это город?
2. Удвоенный возраст его младшей сестры.
4. Число, обратное числу № 10 по вертикали.
4. Возраст его младшей сестры.
6. Номер первой буквы его имени в русском алфавите, если считать «и» девятой буквой, «к» десятой. На 3 единицы больше номера второй буквы его имени.
8. Квадратное число. Цифры этого числа являются номерами двух последних букв его имени, состоящего из 4 букв. Установите его имя.
9. Квадрат числа № 15 по горизонтали.
10. Число, которое уменьшается на 9 при обмене местами его цифр.
11. Размер ботинок, которые он носит.
13. Его возраст.

В котором часу ложился спать Онегин? Эта деталь в описании деревенской жизни Онегина, по-видимому, не интересовала А. С. Пушкина. Однако некоторые «не дошедшие до нас» сведения позволяют точно ответить на поставленный вопрос.

Несомненно, у Онегина были карманные часы. Он имел обыкновение заводить их до отказа 2 раза в день: утром в 8^{30} и ночью, ложась спать. Утром приходилось делать 9 полных оборотов головки часов, а ночью — 11.

Вот и все сообщение. Тем не менее оно настолько правдоподобно, что в конце концов, надо полагать, будет подтверждено пушкиноведами. Но не будем ждать их изысканий и, применяя собственные расчеты, определим, в котором же часу ложился спать Онегин.

Бездельник и черт. (Подготовленная для инсценировки старая задача-сказка на новый лад.)

Среди нас, людей сознательного и радостного труда, завелся этакий Бездельник. И учиться ему лень, и от работы увиливает, и деньги любит, жаден. Никак в толк взять не хочет, что только те деньги хороши, которые честным трудом заработаны. Ходит без дела Бездельник и вздыхает:

— Эх, доля моя горемычная! Никто и знаться со мной не желает. Говорят: «Бездельники нам не нужны. Сам ничего не делаешь и нам мешаешь. Иди к черту!» Да какой черт посоветует мне, как богатым сделаться?

Только подумал это Бездельник, глядь, а черт перед ним стоит.

— Что же, — говорит, — если хочешь, я тебе помогу. Работа легкая и богатым будешь. Вот видишь мост через речку?

— Вижу, — отвечает немного оробевший Бездельник.

— Ну, так перейди по мосту на другой берег, и у тебя будет вдвое больше денег, чем было. И так каждый раз: как только ты пройдешь мост, у тебя будет ровно вдвое больше денег, чем было перед этим.

— Ой ли! — обрадовался Бездельник.

— Верное слово! — уверил черт. — Только, чур, уговор! За то, что я тебе устраиваю такое счастье, ты каждый раз, перейдя через мост, отдавай мне по n копеек за добрый совет. (Мы попытаемся сами установить, какое число копеек назвал черт.)

— Ну, что же, — согласился Бездельник, — раз деньги будут удваиваться, так отчего же не дать тебе каждый раз по n копеек? Начнем, пожалуй!

Прошел мост Бездельник один раз, сосчитал деньги... Вот диво! Действительно, денег стало вдвое больше, чем было.

Бросил он черту n копеек и прошел мост второй раз. Опять стало денег вдвое больше, чем было перед этим.

Отдал Бездельник черту n копеек и прошел по мосту в третий раз. Денег снова стало вдвое больше. Но только и оказалось их ровнехонько n копеек, которые по уговору полностью пришлось отдать черту. Черт захохотал и с глаз сгинул.

Остался Бездельник без копейки. Видно, на чужой совет надо еще свой ум иметь!

Сколько денег было у Бездельника сначала и сколько копеек требовалось отдавать черту? Черт, конечно, знал, что в кармане у Бездельника было такое минимальное количество собственных денег, при котором оказалось возможным наказать его на третьем переходе через мост.

Мастер, принцесса и солдат. Однажды мастер получил определенное количество жемчужин, чтобы изготовить украшение для принцессы. Обдумывая модель изделия, мастер разложил все жемчужины на 9 неравных кучек так, что образовался магический квадрат 3×3 относительно количества жемчужин в кучках. Принцесса восхитилась такой моделью украшения (она увлекалась математическими развлечениями), но все-таки выразила недовольство тем, что ни в одной кучке количество жемчужин не является простым числом.

— Дайте мне еще 9 жемчужин, — сказал мастер, — я добавлю по одной к каждой кучке — и все числа в магическом квадрате окажутся простыми.

Проверили по таблице простых чисел: точно! Принцесса только было вознамерилась обратиться к хранителю драгоценностей с просьбой добавить мастеру 9 жемчужин, как вдруг осмелился заговорить солдат из дворцовой охраны:

— Поступите, принцесса, иначе: выньте из каждой кучки по одной жемчужине, и опять элементами магического квадрата будут простые числа.

Принцесса так и сделала. Солдат оказался прав и в награду за наблюдательность и математическую находчивость получил эти 9 жемчужин.

Сколько жемчужин было выдано мастеру первоначально?

Указания. 1. Вспомните, что магический квадрат из 9 натуральных чисел имеет, например, такой вид:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Если магическая сумма S, то в центральной клетке непременно должно быть число $S/3$. Все пары чисел, расположенные симметрично относительно центральной клетки, являются сопряженными парами, суммы которых одинаковы и дополняют число в центральной клетке до магической суммы S.

2. По условию простые числа получаются как от добавления в каждую клетку по жемчужине, так и после изъятия по одной жемчужине. Это значит, что если один магический квадрат составлен из каких-то простых чисел $\{P_i\}$, то элементами второго должны быть простые числа $\{P_i + 2\}$, т. е. так называемые простые числа-близнецы. Такими парами близнецов являются, например, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19 и т. д.

3. Из таблицы простых чисел выпишите все пары «близнецов» в промежутке [10; 300], — это наша подсказка. В этом промежутке найдутся четыре сопряженные пары, имеющие одинаковые суммы.

4. Центральный элемент определится как половина суммы сопряженной пары.

Примечание. Энтузиасты-любители числовых курьезов рассмотрели далеко продвинутую таблицу простых чисел-близнецов. Им удалось получить еще и такое решение нашей задачи: если бы мастер получил 45 090 жемчужин, то он мог бы предложить такую модель магического квадрата:

3330	7878	3822
5502	5010	4518
6198	2142	6690

если каждый элемент уменьшить или увеличить на 1, то образуются магические квадраты, состоящие только из простых чисел.

Еще задача.

Из какого числа жемчужин мог бы мастер выложить магический квадрат 4 $\times$ 4, все элементы которого — какие-то простые числа, и если каждый элемент увеличить на две единицы, то вновь образуется магический квадрат из простых чисел?

ПЛЮС МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СМЕКАЛКА...

В класс вошла. За ту парту села,
Где училась я десять лет.
На доске написала мелом
$x + y = z$.

Юлия Друнина. «В школе».

Как еще можно складывать числа? Пусть (u_n) — последовательность чисел. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = C_n^1 u_1 + C_n^2 d_1 + C_n^3 d_2 + \ldots + C_n^n d_{n-1}, \quad (1)$$

$d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ — первые члены в строках таблицы разностей складываемых чисел.

Пример. Вычислить по формуле (1) $\sum_{i=1}^{5} u_i$, где $u_1 = 3$, $u_2 = 9$, $u_3 = 13$, $u_4 = 20$, $u_5 = 31$. Составим таблицу разностей и подчеркнем первые разности в каждой строке:

$$\begin{array}{ccccccccc}
3 & & 9 & & 13 & & 20 & & 31 \\
& \underline{6} & & 4 & & 7 & & 11 & \\
& & \underline{-2} & & 3 & & 4 & & \\
& & & \underline{5} & & 1 & & & \\
& & & & \underline{-4} & & & &
\end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{5} u_i = C_5^1 \cdot 3 + C_5^2 \cdot 6 + C_5^3 \cdot (-2) + C_5^4 \cdot 5 + C_5^5 \cdot (-4) = 76.$$

Прямой подсчет короче, скажете вы. Справедливо. И все-таки не спешите высмеивать нашу формулу. Она хороша в тех случаях, когда довольно рано образуется строка нулевых разностей.

Например, полюбуйтесь, как быстро формула (1) преобразуется в более удобную разновидность — в знакомые формулы для сумм квадратов, кубов натуральных чисел, для $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ и т. п.

Для $\sum_{k=1}^{n} k^2$ таблица разностей такова:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & 4 & & 9 & & 16\ldots \\
& \underline{3} & & 5 & & 7 & \\
& & \underline{2} & & 2 & &
\end{array}$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = n \cdot 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \cdot 2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (2)$$

Для $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$ таблица разностей такова:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 8 & & 27 & & 64 & & 125\ldots \\ & \underline{7} & & 19 & & 37 & & 61 & \\ & & \underline{12} & & 18 & & 24 & & \\ & & & \underline{6} & & 6 & & & \end{array}$$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = C_n^1 \cdot 1 + C_n^2 \cdot 7 + C_n^3 \cdot 12 + C_n^4 \cdot 6 = \dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$. (3)

Так как $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (1+2+3+\ldots+n)^2$,

то получаем еще одно классическое соотношение:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2. \quad (4)$$

Для $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)$ таблица разностей такова:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & & 6 & & 12 & & 20\ldots \\ & \underline{4} & & 6 & & 8 & \\ & & \underline{2} & & 2 & & \end{array}$$

Тогда $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) =$

$$= C_n^1 \cdot 2 + C_n^2 \cdot 4 + C_n^3 \cdot 2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \quad (5)$$

З а д а ч а. Вывести формулу (2), используя такой забавный числовой треугольник:

$$\begin{array}{rrrr} & & & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & \ldots & \ldots & n \end{array}$$

Именные и безымянные числовые треугольники

Треугольник Тарталья

$$1 + \underline{2} = 3$$
$$4 + 5 + \underline{6} = 7 + 8$$
$$9 + 10 + 11 + \underline{12} = 13 + 14 + 15$$

Подчеркнутое число равно произведению числа слагаемых слева и справа от знака равенства.

$$1 + 2 + \ldots + 7 + 8 = 6^2$$
$$9 + 10 + \ldots + 15 + 16 = 10^2$$
$$17 + 18 + \ldots + 48 + 49 = 33^2 \text{ — в строке 33 слагаемых}$$
$$50 + 51 + \ldots\ldots + 148 = 99^2 \quad \text{» » 99 »}$$
$$149 + 150 + \ldots\ldots + 445 = 297^2 \quad \text{» » 297 »}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Интересен числовой треугольник, образующийся из последовательности нечетных чисел:

$$\begin{array}{l|c|}
 & N_0 \\
1^3 = 1 & 1 \\
2^3 = 3 + 5 & 2 \\
3^3 = 7 + 9 + 11 & 3 \\
4^3 = 13 + 15 + 17 + 19 & 4 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . \\
n^3 = L + \ldots\ldots + M & n
\end{array}$$

Назовем его «треугольником Фибоначчи» на том основании, что, как предполагают, Фибоначчи использовал этот числовой треугольник для вывода формулы $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

Рассуждал он, возможно, так: номер строки (столбец N_0) совпадает с числом слагаемых в строке, — следовательно, всего в n строках треугольника содержится $S = \frac{(1+n)\,n}{2}$ элементов.

Последний элемент в n-й строке есть S-й член арифметической прогрессии $(a_1 = 1,\ d = 2) \Longrightarrow M = 1 + 2\,(S - 1) = 2S - 1$.

Первый элемент $L = M - 2\,(n - 1)$.

Сумма элементов n-й строки равна $\frac{(M + L)\,n}{2} = (2S - n)\,n = n^3$, что и доказывает истинность подмеченной закономерности для суммы элементов любой строки треугольника.

Складывая строки треугольника, получаем:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + M}_{S \text{ слагаемых}} = \frac{(1 + M)\,S}{2} =$$
$$= S^2 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

В этой формуле слагаемыми являются идущие по порядку числа натурального ряда: 1, 2, 3 … . Французский математик XIX века Жозеф Лиувилль поставил более широкую задачу: найти произвольные натуральные числа $a, b, c, d, \ldots$, сумма кубов которых равнялась бы квадрату их суммы:

$$a^3 + b^3 + c^3 + \ldots = (a + b + c + \ldots)^2.$$

Среди чисел a, b, c, … допускаются и равные между собой.

Лиувиллю удалось получить занятный результат, суть которого легко уяснить на следующих двух примерах:

П р и м е р 1. Возьмем число 6. Оно делится на 1, 2, 3 и 6. А сколько же делителей у каждого из этих делителей? У числа 1 — *один* делитель, у числа 2 — *два* делителя (1 и 2), у числа 3 — *два* делителя (1 и 3) и, наконец, у числа 6 — *четыре* делителя (1, 2, 3 и 6). Вот эти числа делителей (1, 2, 2 и 4) и удовлетворяют интересующему нас соотношению, т. е. имеем:

$$1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 = (1 + 2 + 2 + 4)^2.$$

П р и м е р 2. Возьмем число 30. Его делители: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Число делителей у каждого из них соответственно 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 8. Имеем: $1^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 + 8^3 = (1 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8)^2$.

Способ простой и остроумный.

Треугольник для четных степеней числа 3

$$\begin{aligned}
3^0 &= 1\\
3^2 &= 2 + 3 + 4\\
3^4 &= 5 + 6 + \ldots + 13\\
3^6 &= 14 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 40\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Треугольник для кубов нечетных чисел

$$\begin{aligned}
1^3 &= 1\\
3^3 &= 2 + 3 + \ldots + 7\\
5^3 &= 8 + 9 + \ldots + 17\\
7^3 &= 18 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 31\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Треугольник Никомаха

$$\begin{aligned}
1^3 &= 1\\
2^3 &= 3 + 5\\
3^3 &= 7 + 9 + 11\\
4^3 &= 13 + 15 + 17 + 19\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Каждая строка — сумма n членов (n — номер строки) арифметической прогрессии с разностью $d = 2$. Первый член каждой строки $a_n = n^2 - n + 1$.

З а д а ч а. Вывести эту формулу и доказать, что сумма чисел в n-й строке треугольника Никомаха равна n^3.

Встречные поезда. Два товарных поезда, оба длиной по 250 м, идут навстречу друг другу с одинаковой скоростью 60 км/ч. Сколько секунд пройдет после того, как встретились машинисты, до того, как встретятся кондукторы последних вагонов?

Найти очертания фигуры. Дано 12 спичек. Примем каждую из них за единицу длины. Требуется выложить из 12 спичек такую фигуру, которая охватила бы площадь в 3 квадратные единицы. Найдите не менее четырех различных конфигураций, если исключить простейший случай фигуры, составленной из трех квадратов, сцепленных вершинами.

Задача разметчика. На некоторых предприятиях есть такая специальность: разметчик. Он намечает те линии и точки, по которым надо резать, пилить или сверлить заготовку. Разметчик — геометр.

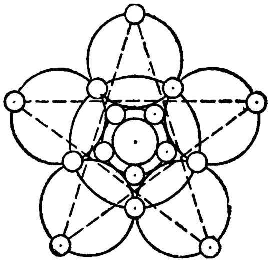


Рис. 11

Однажды ему пришлось наметить линии для разрезания квадратной пластинки из дорогого металла на 6 квадратных кусков, размеры которых безразличны. Обрезков не должно быть. Говоря «геометрически»— надо разрезать квадрат на 6 непересекающихся квадратов, если сторону квадрата можно делить только на целое число частей. Разумеется, разметчик решил эту задачу. Какое будет ваше решение?

Более того, придуманный им способ разрезания оказался алгоритмом для разрезания (без обрезков) всякого квадрата на любое число $k \geqslant 6$ непересекающихся квадратов при условии, что сторону квадрата придется делить только на целое число частей. Докажите, что разметчик прав.

На выставке художественных изделий. Для выставки изделий из самоцветных камней ученик художественно-промышленного училища изготовил пятиконечную звезду с проволочными ободками и круглыми оправами (рис. 11). В оправы он вставил всевозможные самоцветные камни (на рисунке не изображенные): в одну оправу 1 камень, в другую — 2 камня, в третью — 3 и т. д. по порядку до 15 камней включительно.

Разместил молодой мастер камни так искусно, что общее число камней в каждых пяти оправах, расположенных вдоль одного ободка, равно 40 и общее число камней, размещенных в оправах, расположенных на пяти концах звезды, также равно 40.

Найдите распределение камней по пятнадцати оправам, удовлетворяющее указанным условиям.

Зашифрованная арифметика. Обычно это арифметические равенства, в которых все или некоторые цифры заменены буквами или другими символами. Требуется расшифровать значение каждого символа и восстановить числовую запись. Особенно привлекательны задачи, в которых буквы, заменяющие цифры, образуют слова и даже фразы с единственно возможной расшифровкой.

Для решения таких задач нет регулярного правила. Надо рассуждать, подбирать, опираясь на основные положения арифметики, на свойства чисел и числовые закономерности. Например, рассматривая структуру вида АХ + ОН = РАД, заключаем, что Р = 1, значением О может быть только 9, при этом Х + Н $\geqslant$ 10. Иногда бывает необходимо составить таблицу предполагаемых значений буквы, которая, в свою очередь, определит таблицу возможных значений остальных букв с учетом недопустимости дублирования одной цифры для разных букв. Например, последняя цифра произведения ЛИ $\times$ НИ = **Я либо 1, либо 4, либо 6, либо 9.

Это хорошие упражнения для учащихся. Они укрепляют навыки счета, способствуют познанию числовых закономерностей и, как всякое раскрытие тайны дедуктивным методом «версий», т. е.

построением логической цепочки умозаключений, увлекают учащихся всех возрастов.

Не менее увлекательно и **п р и д у м ы в а н и е** таких задач.

Расшифруйте следующие четыре бесспорно верных утверждения:

а) ЯЯЯ = ДА × МА.

б) БОРЯ + ИДИ + БУДЬ = ДОБР (здесь БОРЯ — максимальное из возможных слагаемых).

в) ТРИ + ТРИ + ОДИН = СЕМЬ (здесь «спрятаны» все 10 цифр, причем числа ТРИ и СЕМЬ делятся соответственно на 3 и 7).

г)
$$\begin{array}{r} \times\ \text{ИНН} \\ \text{ДОН} \\ \hline {*}{*}{*}{*} \\ \text{Р}{*}{*} \\ {*}{*}\text{Е}{*} \\ \hline {*}{*}{*}\text{КИ}{*} \end{array}$$

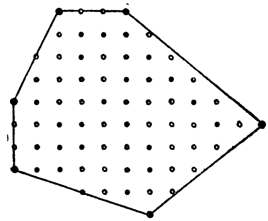


Рис. 12

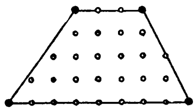


Рис. 13

(Звездочку можете заменять любой подходящей цифрой. Задача имеет единственное решение не только в десятичной системе счисления, но и в системе с основанием $b = 11$. Каковы эти решения?)

Площадь сада — по числу яблонь. При планировании посадок яблонь прямоугольный участок, отведенный под сад, был весь разделен на единичные квадраты. В каждую вершину каждого единичного квадрата (назовем их узловыми точками) высадили яблоню. Шло время. Изменилась форма периметра сада. Теперь очертание границ сада имеет форму многоугольника с вершинами в узловых точках (рис. 12). В каждой узловой точке внутри многоугольника и на его границах растет яблоня.

Школьники, приехавшие помогать сборщикам яблок, спросили садовода: «Как велика площадь яблоневого сада?» В ответ садовод предложил школьникам самим вычислить площадь сада по формуле

$$S = N - 1 + \frac{M}{2}\ (\text{ед}^2),$$

где N — число яблонь внутри многоугольника, ограничивающего сад, M — число яблонь на его периметре, включая яблони, расположенные в вершинах многоугольника, а потом и вывести эту удивительную формулу.

Вечером, после работы, ребята убедились в правильности формулы на примере трапеции, нарисованной на клочке клетчатой бумаги (рис. 13), а рассмотрением общего случая решили заняться на школьном кружке.

Для трапеции получилось: $N = 16$, $M = 14$, откуда $S = 16 - 1 + 7 = 22$ (ед^2).

По формуле $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, $S = \frac{3+8}{2} \cdot 4 = 22$ (ед^2).

Подберите формулу:

а) для функции f, если известно, что $\forall\ x \in \boldsymbol{R}$,

$$f(x) \equiv f(x+1) \equiv f(x+\sqrt{3}) \text{ и } f(0) = \sqrt{3};$$

б) для функции F, чтобы имело место равенство

$$\int_0^1 F(x)\,dx = F\left(\frac{1}{2}\right).$$

Размещение разноцветных квадратиков. Приготовьте четыре комплекта разноцветных квадратиков одного размера, но четырех различных окрасок — желтой, черной, красной и синей — по четыре квадрата каждой окраски. На каждом квадратике первого комплекта напишите цифру 1, на каждом квадратике второго комплекта — 2, на квадратиках третьего комплекта — 3 и на квадратиках четвертого — 4. Надо расположить эти 16 разноцветных квадратиков в виде квадрата, причем так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждой из двух диагоналей находились в каком-либо произвольном порядке квадратики с цифрами 1, 2, 3 и 4, и притом непременно разных окрасок.

Задача допускает очень много решений. Продумайте систему, обеспечивающую возможность получения всех решений. Как велико число всех возможных решений?

Координатно-геометрический способ. Быстро и наглядно устанавливается истинность равенства

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

Как?

Раскуси задачку — скушаешь орешки. Только я принялся решать задачи, как вошла мама с двумя пакетами орехов. Один пакет она поставила на мой стол, другой оставила у себя и тут же предложила мне игру «на орехи».

— За правильное решение первой задачи — сказала мама, — получишь из моего пакета в свой 1 орех. Если же первую задачу не осилишь, из своего пакета в мой переложишь 1 орех. После этого приступишь к решению второй задачи. За правильное решение второй задачи получишь 2 ореха из моего пакета, а не решишь — из своего пакета в мой переложишь 2 ореха и т. д., удваивая количество кочующих из пакета в пакет орехов при том или ином исходе решения каждой последующей задачи.

Я принял эти условия и приступил к делу, но из десяти заданных задач решил не все. И все же, к моему удовольствию, игра закончилась тем, что ровно 601 орешек перекочевал из маминого пакета в мой.

Узнайте порядковые номера задач, которые я решил.

Развертки куба. Любознайкин утверждает, что он может построить более десятка различных форм разверток куба.

Сколько же все-таки максимально?

Наименьшее из возможных. Целое число n, которое разделилось без остатка на 225, состояло из нулей и единиц. Увлеченный в последнее время решением разнообразных задач оптимизации, Любознайкин произвел исследования и обнаружил, что это число n и есть самое меньшее из чисел, делящихся на 225 и состоящее только из единиц и нулей.

Какое это число?

Задача впрок. (В надежде, что наступит время, когда школьников перестанут держать в хрустальном классе вещественных чисел и выпустят на широкое поле чисел комплексных. Тогда осознанно они воспримут нашу интригующую задачу.)

Доказать, что $x^7 + \frac{1}{x^7} = 1$, если $x + \frac{1}{x} = 1$.

Впрочем, для доказательства истинности предложения нет нужды в решении этих уравнений.

СЕМНАДЦАТЬ МГНОВЕНИЙ НАЕДИНЕ С МАТЕМАТИКОЙ

Тогда бы мог воскликнуть я: «Мгновенье!
О, как прекрасно ты, повремени!
Воплощены следы моих борений
И не сотрутся никогда они».

Гете. «Фауст».

Это 17 избранных задач, привлекающих скрытой в их содержании возможностью проявить находчивость и остроумие в подборе способов решения. К каждой задаче здесь же прилагается ее решение, претендующее на признание его красивым. Анализ такого решения и сопоставление с собственными результатами представляет самостоятельный интерес.

Задача 1. Пройдя 3/8 длины моста AB, человек услышал сигнал автомобиля, приближающегося к мосту с постоянной скоростью 60 км/ч. Если он побежит обратно, то встретится с автомобилем в A, если побежит вперед, то автомобиль нагонит его в B.

Как быстро бегает этот человек?

Решение. (5/8 — 3/8) длины моста человек пробегает за такой промежуток времени, который нужен автомобилю, чтобы преодолеть всю длину моста. Следовательно, человек бежит со скоростью $(1/4) \cdot 60 = 15$ км/ч.

Задача 2. Из пункта A реки одновременно поплыли: мяч по течению и спортсмен против течения. Через 10 мин пловец повернул назад и догнал мяч под мостом, находящимся в 1 км от A. Известно, что пловец не изменял своих усилий на протяжении всего времени движения. Какова скорость течения реки?

Решение. Удобно предположить, что мяч покоится в пункте A, вода неподвижна, а мост подплывает к мячу со скоростью действительного течения реки. Если так, то спортсмен плывет 10 мин в одну сторону и столько же времени обратно (вода неподвижна), «догоняя» мяч в пункте A под мостом (по условию), который, следовательно, в это же мгновение должен подплыть к мячу. Значит, мост плыл со скоростью 1000 : 20 = 50 м/мин. Это и есть скорость течения. А скорость пловца безразлична.

Задача 3. В колбе имеется раствор соли. Из колбы отливают $1/n$ часть раствора в пробирку и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого получившийся раствор возвращают в колбу и смешивают с тем раствором, который там оставался. В результате содержание соли в растворе повысилось на p%. Определить процентное содержание соли в первоначальном растворе.

Решение. Пусть в первоначальном растворе содержится воды 1 единица массы, раствора 1 единица объема, а соли $\frac{x}{100}$ единиц массы, следовательно, x% как от объема раствора, так и от массы воды. Отлили $1/n$ единицы массы воды. Условие задачи будет выполнено в обоих смыслах процентного отношения, если уменьшим вдвое объем воды в пробирке (испаряется только вода). При смешивании растворов количество соли осталось прежним; следовательно,

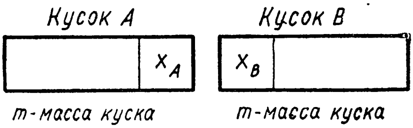
$$\frac{x}{\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2n}} = x + p \Rightarrow x = p(2n-1).$$

Задача 4. Дано: $f(x) = \lg\left(\sqrt{9\operatorname{tg}^2 x + 1} - 3\operatorname{tg} x\right) \Rightarrow f(-x) = \lg\left(\sqrt{9\operatorname{tg}^2 x + 1} + 3\operatorname{tg} x\right)$.

Из этого некто заключил, что заданная функция f — не четная и не нечетная. Доказать, что он неправ.

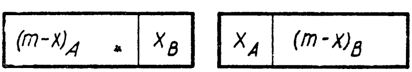
Решение. $f(x) + f(-x) = \lg 1 = 0 \Longrightarrow f(-x) = -f(x) \Longrightarrow f$ — нечетная.

Задача 5. От двух кусков сплава одинаковой массы, но с различным процентным содержанием меди отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих кусках стало одинаковым. Во сколько раз масса отрезанного куска меньше массы целого куска?



Решение. $x_A = x_B$—отрезанные части кусков A и B.

После сплавления получилось:



Процентное содержание меди в кусках будет одинаковым лишь при

$$\frac{(m-x)_A}{x_A} = \frac{x_B}{(m-x)_B} \Rightarrow \frac{m-x}{x} = \frac{x}{m-x} \Rightarrow x = \frac{m}{2} \Rightarrow m : \frac{m}{2} = 2.$$

Ответ. В 2 раза.

Задача 6. На стороне BC квадрата $ABCD$ отмечена буквой E произвольная точка (рис. 14, *а*). Биссектриса угла DAE пересекает сторону CD в точке F, $|AE| = a$. Вычислить $|BE| + |DF|$.

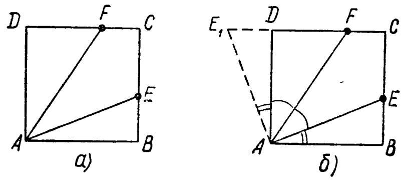


Рис. 14

Решение. Поворотом $R_A^{+90°}$ отобразим $\triangle ABE$ на $\triangle ADE_1$ (рис. 14, *б*), $\widehat{AFD} = \widehat{FAB} = \widehat{FAE_1} \Rightarrow |AE_1| = |E_1F|$.

Из свойств поворота имеем: $|AE| = |AE_1|$, $|BE| = |DE_1| \Rightarrow$ $\Rightarrow |DF| + |BE| = |DF| + |DE_1| = |E_1F| = |AE_1| = |AE| = a$.

Ответ. $|BE| + |DF| = a$.

Задача 7. В прямоугольнике $ABCD$ $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|EC|}{|BC|} = \frac{|BF|}{|BC|} = \frac{1}{3}$ (рис. 15, *а*).

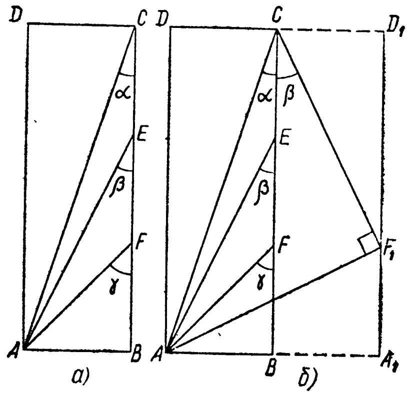


Рис. 15

Геометрически (не привлекая тригонометрические функции) доказать, что $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} = 90°$.

Решение. Построим $(A_1D_1) = S_{(BC)}(AD)$ и $[A_1F_1] \cong [BF]$ (рис. 15, *б*).

Нетрудно установить теперь, что $\widehat{BCF_1} = \beta$, $[CF_1] \perp [AF_1]$ и $|AF_1| = |CF_1|$, т. е. что $\triangle AF_1C$ равнобедренный прямоугольный, откуда $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = 45°$, $\widehat{\gamma} = 45°$ и, наконец, $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} = 90°$.

Задача 8. Доказать истинность неравенства

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots + \sqrt{6}}}} + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \ldots + \sqrt[3]{6}}}} < 5.$$

Решение. Если последнюю цифру 6 в первом слагаемом заменить на 9, а во втором — на 8, то после извлечения всех корней мы получим: $3 + 2 = 5$. Следовательно, левая часть данного выражения меньше 5.

Задача 9. 27 одинаковых механизмов могут выполнить определенное задание за 35 ч непрерывной работы. Но через 11 ч к выполнению этого задания подключили еще несколько таких же

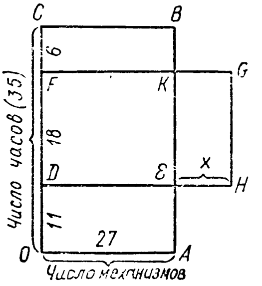


Рис. 16

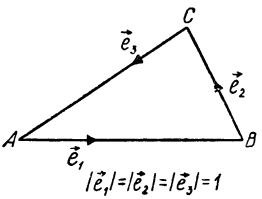


Рис. 17

механизмов, и работа была закончена на 6 ч раньше. Сколько механизмов было подключено дополнительно?

Решение. Пусть прямоугольник $OABC$ (рис. 16) изображает количество заданной работы. $OAED$ — количество работы, выполненной до подключения x добавочных механизмов. Остальную работу (фиг. $EDCB$) выполнили $27 + x$ механизмов. Следовательно, второй период работ изобразится прямоугольником $DHGF$ ($|DH| = 27 + x$), равновеликим прямоугольнику $DEBC$, у которого $|DF| = (35 - 11) - 6 = 18$, так как эта часть работы выполнена на 6 ч раньше срока. Далее, $S_{FKBC} = S_{EHGK} \Longrightarrow 27 \cdot 6 = 18x \Longrightarrow x = 9$.

Задача 10. Доказать, что для всякого треугольника ABC

а) $\cos\widehat{A} + \cos\widehat{B} + \cos\widehat{C} \leqslant \frac{3}{2}$;

б) $\cos 2\widehat{A} + \cos 2\widehat{B} + \cos 2\widehat{C} \geqslant -\frac{3}{2}$.

Решение. а) Построим на сторонах треугольника единичные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (рис. 17). Очевидно, что $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 \geqslant 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \vec{e}_1^{\,2} + \vec{e}_2^{\,2} + \vec{e}_3^{\,2} + 2\vec{e}_1\vec{e}_2 + 2\vec{e}_2\vec{e}_3 + 2\vec{e}_1\vec{e}_3 \geqslant 0 \Longrightarrow 1 + 1 + 1 +$
$+ 2\cos(180° - \widehat{B}) + 2\cos(180° - \widehat{C}) + 2\cos(180° - \widehat{A}) \geqslant 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow 3 - 2(\cos\widehat{B} + \cos\widehat{C} + \cos\widehat{A}) \geqslant 0 \Longrightarrow \cos\widehat{A} + \cos\widehat{B} + \cos\widehat{C} \leqslant \frac{3}{2}$.

б) Рекомендация: воспользоваться неравенством $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 \geqslant 0$, где O — центр описанной окружности.

Задача 11. Имеются два сплава серебра и золота: в одном количества этих металлов находятся в отношении 2 : 3, в другом — в отношении 3 : 7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором серебро и золото были бы в отношении 5 : 11?

Решение. Каждый сплав характеризуется двумя числами: его массой (x) в кг и числом (y) «частей», например серебра, в данном количестве сплава. Значит, удобно считать математической моделью сплава вектор с координатами x, y. Доли серебра:

в I сплаве: 2 : 5 = 32 : 80,
во II сплаве: 3 : 10 = 24 : 80,
в III сплаве: 5 : 16 = 25 : 80.

В соответствии с тем, что заданная масса составляемого (III) сплава 8 кг, построим три вектора (рис. 18): $\overrightarrow{OA}$ (8; 32), $\overrightarrow{OB}$ (8; 24), $\overrightarrow{OC}$ (8; 25), пометив ординату начала координат не нулем, а числом

24. Выполняем разложение $\overrightarrow{OC}$ на сумму $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$, где $\overrightarrow{OA'} \parallel \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB'} \parallel \parallel \overrightarrow{OB}$. Легко вычисляемые проекции векторов $\overrightarrow{OA'}$ и $\overrightarrow{OB'}$ на Ox дают ответ: надо взять 1 кг первого сплава и 7 кг второго.

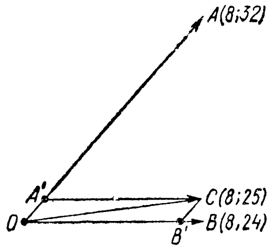


Рис. 18

Задача 12. Доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ при любом постоянном $x \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Решение. Для любого фиксированного значения x имеем: $k \leqslant x < k + 1$, где k — целое число. Тогда при $n > k$

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{x}{k+1} \cdot \frac{x}{k+2} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{n}$$

Так как $\frac{x}{k+1} > \frac{x}{k+2} > \ldots > \frac{x}{n}$, то $\frac{x^n}{n!} < \frac{x^k}{k!} \cdot \underbrace{\frac{x}{k+1} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{k+1}}_{(n-k)\ \text{раз}} = \frac{x^k}{k!} \left(\frac{x}{k+1}\right)^{n-k}$.

Так как $\frac{x}{k+1} < 1$, то $\left(\frac{x}{k+1}\right)^{n-k} \to 0$ при $n \to \infty$, а первый множитель от n не зависит — число постоянное. Значит,

$$\frac{x^n}{n!} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Задача 13. Решить уравнение $\sqrt{x+5} = 5 - x^2$.

Решение. Заданное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} (\sqrt{x+5})^2 = 25 - 10x^2 + x^4 \\ x + 5 \geqslant 0 \\ 5 - x^2 \geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5^2 - (2x^2+1)\,5 + (x^4 - x) = 0 \\ -\sqrt{5} \leqslant x \leqslant \sqrt{5}. \end{cases}$$

Теперь решим уравнение как квадратное относительно «переменного» 5:

$$5 = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{(2x^2+1)^2 - 4(x^4 - x)}}{2} \Leftrightarrow 9 - 2x^2 = \pm (2x + 1).$$

Решая эти два квадратных уравнения относительно x, находим корни заданного уравнения, принадлежащие отрезку

$$[-\sqrt{5};\ \sqrt{5}]:\ x_1 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2};\ x_2 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}.$$

Задача 14. Функция f задана выражением

$$f(x) = 4(x^2 + a^2 + 1) - (x + a + 1)^2 - (x + a - 1)^2 - \\ - (-x + a + 1)^2 - (x - a + 1)^2.$$

Доказать, что $E(f)$ состоит из одного элемента. Какого?

Р е ш е н и е. $f'(x) = 0 \Longrightarrow \forall\, x \in D(f)$ имеем: $f(x) = c$. Найдем c, например, как значение $f(a)$. Так как $f(a) = 0$, то

$$E(f) = 0.$$

З а д а ч а 15. Упростить запись функции

$$F(x) = 4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4(\sin^6 x + \cos^6 x) - 1.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся тем, что всякая функция есть одна из первообразных для ее же производной.

$$F'(x) = 16(\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x) -$$
$$-24(\sin^5 x \cos x - \cos^5 x \sin x) = 2 \sin 4x.$$

Теперь запись любой из первообразных для $2 \sin 4x$ имеет вид $-\frac{1}{2}\cos 4x + C$, C — произвольная постоянная. При некотором значении $C = C_1$ имеем: $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 4x + C_1$. Найдем C_1, полагая, например, $x = 0$. Так как $F(0) = -1$ и $\cos 0 = 1$, то $C_1 = -\frac{1}{2}$. Тогда $F(x) = -\frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$ или $F(x) = -\cos^2 2x$.

З а д а ч а 16. Теплоход отправился в дальний морской рейс. Когда он отошел от берега на расстояние 180 миль, за ним вылетел гидросамолет с экстренной почтой. Скорость гидросамолета в 10 раз больше скорости теплохода. На каком расстоянии от берега гидросамолет нагонит теплоход?

Р е ш е н и е. Так как скорость гидросамолета в 10 раз больше скорости теплохода, то 180 миль — это 9/10 искомого пути s; $s = 200$ миль.

З а д а ч а 17. Окружность O разделена точками $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на n равных дуг. Доказать, что $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = 0$.

Р е ш е н и е. Пусть $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$.

Поворот $R_0^{\frac{360°}{n}}$ отображает на себя фигуру, состоящую из совокупности заданных слагаемых $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_n}$ (лишь с циклической перестановкой индексов). Следовательно, и $R_0^{\frac{360°}{n}}(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB}$. Так как $\frac{360°}{n} < 360°$, то указанное отображение возможно только в случае $\overrightarrow{OB} = \vec{0}$, что и требовалось доказать.

ДЕЛАЕМ «ОТКРЫТИЯ»

Мышление начинается с удивления.
(Приписывается *Аристотелю*)

Путь познания увлекателен, но не усыпан розами. Еще одним подтверждением этой истины является «открытие» Любознайкина, взбудоражившее весь класс и даже всю школу.

Вот как это было. Понадобилось нам проложить тропинку из пункта A в пункт B с обязательным заходом в точку C, принадлежащую прямой PQ, но еще не отмеченную на ней. Требовалось найти эту точку при условии, что тропинка $|AC| + |CB|$ будет кратчайшей (рис. 19).

Рис. 19

Конечно, многим известна и эта задача, и ее решение. Строится точка B_1, симметричная точке B относительно прямой PQ. Прикладывается линейка к точкам A и B_1, тогда точка пересечения прямых AB_1 и PQ и есть искомая точка C.

— Докажите правильность решения, — потребовал учитель.

Мы рассуждали так: $|BC| = |B_1C|$; следовательно, $|AC| + |BC| = |AC| + |B_1C| = |AB_1|$; длина отрезка AB_1 выражает наименьшее расстояние между точками A и B_1, а так как $|AC| + |BC| = |AB_1|$, то точка C и является искомой (рис. 20, *а*).

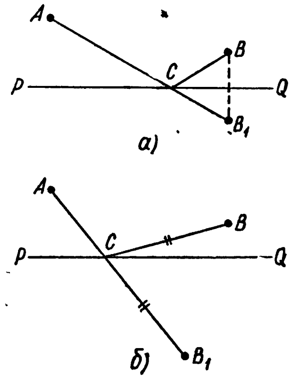


Рис. 20

Как по-вашему: достаточно ли убедительно наше обоснование? Вы рассуждали бы иначе?

Впрочем, наши ребята и в книгах нашли аналогичные доказательства.

Прошел день, другой. Мы спокойно ждали очередного урока геометрии. И вдруг... все рухнуло.

— Прошу всех к доске, — с загадочным видом произнес Любознайкин.

— Смотрите и удивляйтесь! На таком же чертеже я беру произвольную точку C прямой PQ. Продолжаю отрезок AC за точку C и откладываю $|CB_1| = |CB|$ (рис. 20, *б*).

Рассуждаю, как прежде: $|AC| + |CB| = |AC| + |CB_1| = |AB_1|$, а длина отрезка AB_1 выражает наименьшее расстояние между точками A и B_1. Значит, и эта точка C — искомая. Парадокс: любая точка прямой может быть решением задачи?!

В чем же состоял логический изъян нашего первоначального, казалось бы, столь очевидного доказательства?

Две «фотографии» трех средних

Пусть a и b — произвольные положительные числа. Тогда

(1) $\frac{a+b}{2}$ — среднее арифметическое чисел a и b,

(2) $\sqrt{a \cdot b}$ — среднее геометрическое чисел a и b,

(3) $\frac{2ab}{a+b}$ — среднее гармоническое чисел a и b.

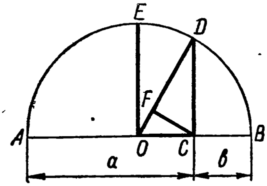


Рис. 21

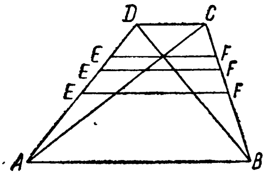


Рис. 22

Число, обратное среднему гармоническому: $\frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, есть среднее арифметическое чисел, обратных числам a и b.

Почему (1) и (2) так названы — ясно: (1) — средний член из трех, образующих арифметическую прогрессию a, $\frac{a+b}{2}$, b; (2) — средний член из трех, образующих геометрическую прогрессию a, $\sqrt{ab}$, b.

Термин «среднее гармоническое» имеет, несомненно, какое-то касательство к музыке, но об этом позже. А сначала пофантазируем: какие отрезки и на каком «фоне» явились бы подходящими «фотографиями» (геометрической интерпретацией) этих трех знаменитых «средних». Можно предложить две «фотографических карточки»: одну на «фоне» окружности, другую — на «фоне» трапеции.

Пусть $|AC| = a$, $|CB| = b$, $|AB| = a + b$ — длина диаметра окружности O. Построим $[CD] \perp [AB]$, $[OD]$, $[CF] \perp [OD]$ (рис. 21). Тогда любой отрезок, конгруэнтный радиусу окружности, например $[OD]$, где $|OD| = \frac{a+b}{2}$, изображает среднее арифметическое, $[DC]$, где $|DC| = \sqrt{a \cdot b}$ — среднее геометрическое, и $[DF]$, где $|DF| = \frac{2ab}{a+b}$ — среднее гармоническое чисел a и b.

Доказательство нетрудно выполнить самостоятельно, равно как и убедиться в том, что

$$|CD|^2 = |OD| \cdot |DF|.$$

Последнее равенство рассказывает о любопытной связи между тремя «средними»: *среднее геометрическое двух положительных чисел является средним геометрическим между их средним арифметическим и средним гармоническим.*

Для получения второго «фотоснимка» (тоже красивая интерпретация) изобразим трапецию $ABCD$ (рис. 22) и проведем $[EF] \parallel [AB] \parallel [CD]$. Пусть $|AB| = a$ и $|DC| = b$, тогда если $[EF]$ — средняя линия, то $|EF|$ — среднее арифметическое чисел a и b. Это очевидно. Если же $[EF]$ делит трапецию на две подобных фигуры, то $|EF|$ — среднее геометрическое чисел a и b.

Наконец, если $[EF]$ проходит через точку пересечения диагоналей трапеции, то $|EF|$ — среднее гармоническое чисел a и b.

Доказательство этих утверждений—хорошая задача для учащихся.

Есть много красивых тождеств и тождественных неравенств, относящихся к этим «средним». Одно из них: *n-я степень среднего арифметического двух положительных чисел всегда меньше суммы* *n-х степеней этих чисел*, $n \in N$. Доказывается обычно по индукции, но проще так: пусть $a > 0$, $b > 0$, тогда $a < \sqrt[n]{a^n + b^n}$, $b < \sqrt{a^n + b^n}$, откуда $a + b < 2\sqrt{a^n + b^n} \Longrightarrow \frac{a+b}{2} < \sqrt{a^n+b^n} \Longrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^n < a^n + b^n$.

З а д а ч а. Беру два целых числа: $a = 8$, $b = 24$. Нахожу среднее гармоническое: $\frac{2ab}{a+b} = 12$ — удача: тоже целое число!

Еще для каких $a \in \boldsymbol{Z}$ и $b \in \boldsymbol{Z}$ их среднее гармоническое есть целое число?

Гармоническая последовательность и музыкальные интервалы. Напишем подряд a, $\frac{2ab}{a+b}$, b и буквам a, b придадим значения: $a=\frac{1}{n}$, $b = \frac{1}{n+2}$, $n \in \boldsymbol{N}$. Тогда среднее гармоническое $\frac{2ab}{a+b}$ примет значение $\frac{1}{n+1}$. Образовались три члена последовательности: $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{n+2}$, ..., которую называют гармонической. Полагая $n = 1$, получим:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \dots,\ \frac{1}{n},\ \dots$$

Одна из особенностей членов этой последовательности состоит в том, что отношение ее соседних членов почти точно равно отношению частот двух звучащих струн, формирующих гармоничные музыкальные интервалы.

Если колеблющаяся струна длины l дает некоторый определенный тон, например звучит как «до»:  , то струна длины $\left(\frac{1}{2} : 1\right) \cdot l = \frac{1}{2} l$ дает верхнюю октаву для этого тона: , струна длины $\left(\frac{1}{3} : \frac{1}{2}\right) \cdot l = \frac{2}{3} l$ — квинту, т. е. в нашем примере зазвучит как «соль»:  ; струна длины $\left(\frac{1}{4} : \frac{1}{3}\right) \cdot l = \frac{3}{4} l$ — верхнюю кварту («до — фа»), т. е. зазвучит как «фа»:

 ; струна длины $\left(\frac{1}{5}:\frac{1}{4}\right)\cdot l$ — бо́льшую терцию («до — ми») и зазвучит как «ми»: , струна длины $\left(\frac{1}{6}:\frac{1}{5}\right)\cdot l$ зазвучит как «ми-бемоль»:  (малая терция: «до — ми-бемоль»).

Предлагается решить следующие задачи:

1. Доказать, что для всех целых $n > 1$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}>1.$$

2. Доказать, что

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+\ldots+n}\underset{n\to\infty}{\to}2.$$

Ряд из чисел, а сам не число. Так — интригующе — озаглавила свой доклад ученица X класса Ната Молодых.

Н а т а. Пусть задана числовая последовательность

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

Это значит, что каждому натуральному n поставлено в соответствие число u_n. Выражение

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \qquad (1)$$

составленное из членов последовательности, называется *числовым рядом*, а n-й член последовательности, u_n, — *общим членом ряда*.

Общий член гармонического ряда $u_n=\frac{1}{n}$. Всякий заданный числовой ряд (1), в свою очередь, порождает новую числовую последовательность (s_n), где $s_1=u_1$, $s_2=u_1+u_2$, $s_3=u_1+u_2+u_3$, ..., $s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$, ... Ее называют *последовательностью частичных сумм ряда*.

Если последовательность (s_n) сходится к какому-либо числу s, т. е. если $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$, то говорят, что ряд (1) *сходится*, а число s называют *суммой* этого ряда. Так устанавливается понятие *суммы бесконечного ряда*.

В свою очередь, всякий сходящийся ряд можно понимать как некоторое разложение числа, к которому ряд сходится.

Если же s_n не имеет предела, то соответствующий ряд называется *расходящимся*. Расходящийся ряд приходится воспринимать как абстрактное выражение, не представляющее никакого числа.

Докажем, что именно таков гармонический ряд: составлен из чисел, а сам не число.

Допустим, что гармонический ряд сходится к числу s. Тогда

$$s_n < s_{2n} < s. \qquad (2)$$

Зададим $\varepsilon = 0,1$. Из допущения следует существование такого N, что $s - s_n < 0,1$ для всех $n \geqslant N$. (3)

Сопоставляя неравенства (2) и (3), получаем:

$$s_{2n} - s_n < 0,1 \text{ для всех } n \geqslant N. \qquad (4)$$

Но для всякого n имеем:

$$s_{2n} - s_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ слагаемых}} > n \cdot \frac{1}{2n} = 0,5. \qquad (5)$$

Неравенства (4) и (5) противоречивы и допущение о сходимости гармонического ряда отвергается.

Учитель. Ната познакомила нас с простым и вполне доброкачественным доказательством расходимости гармонического ряда, выполненным по способу «от противного». Есть и прямые доказательства этой теоремы.

Любопытно, что разработка вариантов доказательства расходимости гармонического ряда до сих пор привлекает внимание педагогов-математиков. Коллекция различных доказательств еще далеко не так велика, как, например, коллекция вариантов доказательства теоремы Пифагора. Но набирается уже не менее десяти.

Из прямых доказательств, по-моему, очень красиво и вполне доступно тем, кто овладел темой «Интеграл», такое: пусть $k = 1, 2, \ldots$; для любого $x \geqslant k$ справедливо

$$\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{x} \Rightarrow \int\limits_{n}^{n+1} \frac{dx}{k} \geqslant \int\limits_{n}^{n+1} \frac{dx}{x}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{k} \geqslant \int\limits_{n}^{n+1} \frac{dx}{x}.$$

Имеем: $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \geqslant \int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x} + \int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x} + \ldots +$

$$+ \int\limits_{n}^{n+1} \frac{dx}{x} = \int\limits_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1), \text{ т. е.}$$

$$S_n > \ln(n+1) \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Значит, последовательность (S_n) не ограничена сверху и гармонический ряд расходится.

Задача. (В случае необходимости загляните в главу «Ответы и решения».) Дан ряд $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \ldots + ax^n + bx^{n+1} + (a + b)\, x^{n+2} + \ldots$ Если при каких-либо значениях x ряд сходится к $S(x)$, то для данного ряда можно найти соответствующие значения S. Как?

Курьезы гипотенузы. Для подбора натуральных значений длин катетов a, b и гипотенузы c известны формулы:

$$a = m^2 - n^2, \ b = 2mn, \ c = m^2 + n^2,$$

где m и n — произвольно назначаемые целые числа.

Однажды Любознайкин полюбопытствовал: какими будут a, b и c, если m всякий раз будет на 1 больше, чем n? Получилась таблица:

n	m	a	b	c
1	2	3	4	5
2	3	5	12	13
3	4	7	24	25
4	5	9	40	41
5	6	11	60	61

И вот тут наш любитель необычайных и курьезных соотношений сделал свое очередное «открытие». Он обнаружил, что если в каждой строке полагать n и m ц и ф р а м и двузначного числа в системе счисления с основанием a, то число $(\overline{nm})_a$, выраженное в десятичной системе, как раз даст гипотенузу c, т. е. $(\overline{nm})_a = na + m = c$.

В самом деле,

$$(12)_3 = 1 \cdot 3 + 2 = 5$$
$$(23)_5 = 2 \cdot 5 + 3 = 13$$
$$(34)_7 = 3 \cdot 7 + 4 = 25$$
$$(45)_9 = 4 \cdot 9 + 5 = 41$$
$$(56)_{11} = 5 \cdot 11 + 6 = 61$$

и т. д.

Чем хороши математические игры — головоломки?

Вначале для нас это задачи, решаемые методом «проб и ошибок», игры-соревнования «на время», на разнообразие решений, т. е. как бы математический эксперимент. А когда у нас «прорезывается» вкус к аналитическим методам, отношение к такого рода математическим развлечениям изменяется. Интерес смещается в направлении осмысливания математической сути задачи. Не удастся ли придумать экономный алгоритм, выяснить условия существования, условия единственности решения, возможность обобщения?

В этом качестве иные головоломки становятся крепкими орешками, раскусывание которых доставляет умственное наслаждение. Например:

Т е м а: $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i = \prod\limits_{i=1}^{k} x_i$ — для каждого $k > 1$ $(k \in N)$ существует k целых положительных чисел (не обязательно различных), сумма и произведение которых одинаковы.

Э т а п и г р ы и н а б л ю д е н и й. Задаем значения $k = 2, 3, \ldots$ и подбираем:

$2+2=2\cdot 2$ ($k=2$); $3+2+1=3\cdot 2\cdot 1$ ($k=3$); $4+2+1+1=4\cdot 2\cdot 1\cdot 1$ ($k=4$); $3+3+1+1+1=3\cdot 3\cdot 1\times 1\cdot 1$ или $5+2+1+1+1=5\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1$ ($k=5$) и т. д.

Продвинувшись, например, до $k=25$, подмечаем, что только для $k=2, 3, 4, 6, 24$ искомые множества единственные.

Этап размышлений и «самоозадачивания». Выявляется очередная загадка натуральных чисел: действительно ли для любого $k\in N$ существует хотя бы одно множество искомых чисел и в чем секрет того, что для каких-то избранных значений k оно — единственное? Сколько таких значений на отрезке $25\leqslant k\leqslant 125$?

Делаем сразу четыре «открытия»:

1. Находим ответ на первый вопрос: «да». Для формирования искомого множества достаточно взять три числа: k, 2 и единицу, повторенную $k-2$ раз. Действительно,

$$k+2+\underbrace{1+\ldots+1}_{(k-2)\ \text{раз}}=k\cdot 2\cdot\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{(k-2)\ \text{раз}}.$$

2. Натуральные числа a, b и $(k-2)$ единиц образуют искомое множество тогда и только тогда, когда

$$(a-1)(b-1)=k-1;$$

если $k-1$ — составное число, то существуют по меньшей мере два искомых множества для заданного значения k.

3. Аналогично a, b, 2 и $(k-3)$ единиц образуют искомое множество всякий раз, когда $(2a-1)\cdot(2b-1)=2k-1$.

4. Необходимое условие единственности: числа $(k-1)$ и $(2k-1)$ простые.

Истинность последних трех утверждений установить легко.

Теперь, «примеряя» необходимое условие единственности искомых множеств для $25\leqslant k\leqslant 125$, отсеиваем все неподходящие значения k. Остаются: $k=30, 42, 54, 84, 90, 114, 132$. Для шести из них имеются, кроме стандартного искомого множества (k, 2, $k-2$ единиц), вторые множества, показанные в таблице (перечислены все элементы множества, кроме единиц).

k	Вторые искомые множества
30	(3, 3, 2, 2)
42	(3, 2, 2, 2, 2)
54	(8, 2, 2, 2)
84	(8, 4, 3)
90	(5, 5, 2, 2)
132	(6, 6, 2, 2)

Получается, что на отрезке $25\leqslant k\leqslant 125$ имеется лишь одно значение: $k=114$, для которого можно построить единственное множество, удовлетворяющее заданному уравнению.

ИЩЕМ НЕОБЫЧНОЕ В ОБЫЧНЫХ ЧИСЛАХ

Сколько тайн, на формулах распятых,
Нам раскроют завтрашние дни!

Вл. Михановский

Числа-«самородки». Возьмем произвольное натуральное число, например 13. Прибавим сумму его цифр, образуется число 17. К этому результату тоже прибавим сумму его цифр, образуется 25. Продолжая так действовать, получим последовательность чисел: 13, 17, 25, 32, 37, 47, ...

Выясним, можно ли полученную последовательность продолжить влево, т. е. существует ли натуральное число, которое в сумме с его же цифрами дало бы 13. Пробуем 12; $12 + 3 = 15$ — плохо. Пробуем 11; $11 + 2 = 13$ — хорошо. Значит, перед числом 13 в нашей последовательности должно быть 11. А перед ним? Пробуем 10; $10 + 1 = 11$ — хорошо. А перед числом 10? Здесь и без пробы ясно, что числу 10 будет предшествовать 5. В самом деле, $5 + 5 = 10$. Но для числа 5 нет предшественника среди натуральных чисел.

Таким образом, в последовательности 5, 10, 11, 13, 17, 25, ... все числа, кроме пятерки, «сформированы» по единому правилу, а число 5 оказалось как бы «самородком».

Приглашаем любознательных отправиться в поиски других «самородков», аналогичных числу 5.

Однозначные «самородки» обнаруживаются сразу. Это, очевидно, 1, 3, 5, 7 и 9.

Из двузначных наименьшим «самородком» будет число 20. (Легко убедиться непосредственно, что ни одно из чисел от 1 до 19 в сумме с его же цифрами не образует 20.) Следующий двузначный «самородок» — число 31. (Убедитесь!) Еще какие двузначные числа являются «самородками»?

Есть коллекция «самородков» и среди многозначных чисел, например: 132, 143, 233, 929, 1952, 874531 и т. п.

Не так-то легко было выявить их!

* * *

Десятизначное квадратное число. Автору данной книги известны два квадратных числа, все 10 цифр каждого из которых различны:

$1026753849 = 32043^2$;

$1042385796 = 32286^2$.

Не возникнет ли у читателя желание продолжить поиск новых квадратных чисел, записываемых десятью различными цифрами?

Примечательные числа. Натуральное число примечательно тем, что $\frac{1}{2}$ его — квадрат, $\frac{1}{3}$ его — куб, $\frac{1}{5}$ его — пятая степень соответственных натуральных чисел. Таких чисел бесконечно много. Какое из них наименьшее?

Волшебная красота магических квадратов. Красивы не только они сами, но и приемы их составления. Занимателен такой прием составления магического квадрата 7×7 из последовательности натуральных чисел. В отчеркнутую часть (рис. 23) квадрата 7×7 вписана «диагонально» последовательность нечетных чисел (1, 3, ..., 49). Из оставшихся «уголков» скомпанована симметричная фигура (рис. 24), в клетки которой также «диагонально» вписана последовательность четных чисел (2, 4, ..., 48). Теперь завершающим этапом конструирования магического квадрата является задача: разъединить фигуру (2) на «уголки» и приставить их к фигуре (1) так, чтобы образовался магический квадрат 7×7.

			1			
		15	9	3		
	29	23	17	11	5	
43	37	31	25	19	13	7
	45	39	33	27	21	
		47	41	35		
			49			

Рис. 23

		8	2		
	22	16	10	4	
36	30	24	18	12	6
44	38	32	26	20	14
	46	40	34	28	
		48	42		

Рис. 24

Совершенное число. Так называют натуральное число, равное сумме своих делителей, разумеется, исключая делитель, равный самому числу. Обозначают символом V_n, где n — порядковый номер совершенного числа. Самое меньшее $V_1 = 6\ (=1 + 2 + 3)$; $V_2 = 28\ (=1 + 2 + 4 + 7 + 14)$; $V_3 = 496$.

Лев Николаевич Толстой не раз, бывало, шутливо «похвалялся» тем, что дата его рождения (28 авг. по календарю того времени) является совершенным числом. Год рождения Льва Толстого (1828) тоже интересное число:

а) последние две цифры (28) образуют совершенное число;

б) если обменять местами первые две цифры, то получится $V_4 = 8128$ — четвертое совершенное число.

«Возраст» этих четырех совершенных чисел солидный — не менее 2 тыс. лет. Пятое совершенное число $V_5 = 33550336$ выявилось в 1460 г., а в 1644 г. француз Мерсенн (друг Ферма) нашел сразу четыре последующих совершенных числа (Мерсенн указал шесть чисел, но впоследствии выяснилось, что два из них не являются совершенными).

Нечетных совершенных чисел, по-видимому, не существует, но до сих пор это никем не доказано и не опровергнуто.

Л. Эйлер в 1750 г. доказал, что все четные совершенные числа могут быть представлены в виде произведения $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$, где p и $2^p - 1$ — некоторые простые числа.

В такой форме теперь и записывают большие совершенные числа, например: $V_{18} = 2^{3216} \cdot (2^{3217} - 1)$.

Занятно, что «совершенство» совершенных чисел не исчерпывается совпадением числа и суммы его делителей. Любители и профессионалы-математики со временем обнаружили еще несколько любопытных особенностей совершенных чисел:

а) каждое из известных совершенных чисел разлагается на сумму последовательных степеней числа 2 от 2^{p-1} до $2^{2(p-1)}$:

$$
\begin{aligned}
V_1 &= 2 \cdot (2^2 - 1) = 6 = 2 + 2^2,\\
V_2 &= 2^2 \cdot (2^3 - 1) = 28 = 2^2 + 2^3 + 2^4,\\
V_3 &= 2^4 \cdot (2^5 - 1) = 496 = 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8,\\
V_4 &= 2^6 \cdot (2^7 - 1) = 8128 = 2^6 + 2^7 + \ldots + 2^{12}
\end{aligned}
$$

и т. д.;

б) каждое из известных совершенных чисел, начиная с V_2, разлагается на сумму кубов последовательных нечетных чисел:

$$
\begin{aligned}
V_2 &= 28 = 1^3 + 3^3,\\
V_3 &= 496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3,\\
V_4 &= 8128 = 1^3 + 3^3 + \ldots + 13^3 + 15^3,\\
V_5 &= 33550336 = 1^3 + 3^3 + \ldots + 127^3
\end{aligned}
$$

и т. д.;

в) складывая цифры каждого из известных совершенных чисел, начиная с V_2, и повторяя этот процесс для получающегося результата некоторое количество раз, всегда в конце концов получим число 1:

$V_2 = 28;\ 2 + 8 = 10;\ 1 + 0 = 1;$
$V_3 = 496;\ 4 + 9 + 6 = 19;\ 1 + 9 = 10;\ 1 + 0 = 1;$
$V_4 = 8128;\ 8 + 1 + 2 + 8 = 19,\ \ldots,\ 1 + 0 = 1;$
$V_5 = 33550336$; сумма цифр равна 28; $2 + 8 = 10$; $1 + 0 = 1$ и т. д.; другими словами, каждое четное совершенное число, кроме $V_1 = 6$, конгруэнтно числу 1 по модулю 9;

г) для каждого из известных совершенных чисел, кроме $V_1=6$: если последняя цифра 6, то предшествующая — непременно нечетная.

Задача. Представьте каждое из известных вам совершенных чисел в виде произведения по формуле Эйлера и их же запишите в двоичной системе. Обнаружится любопытная закономерность в количестве единиц и нулей и их расположении в записи V_n по двоичной системе. Какая?

В кунсткамере простых чисел. Из коллекции «диковинок»: три простых числа с обилием девяток:

199999, 999999999091, 999999999989

и одно огромное простое, очаровывающее устойчивой закономерностью в расположении цифр:

1234567891234567891234567891.

* * *

Вам захотелось поразить друзей мгновенным «извлечением из памяти» какого-либо простого числа за пределами первой сотни. Нет ничего проще.

Напишите подряд n последовательных степеней числа 3 ($n = 0, 1, 2, 3$), начиная с 3^0, и закончите запись цифрами 01 или 07. К вашим услугам объявятся восемь простых чисел: 101 и 107, 1301 и 1307, 13 901 и 13 907, 1 392 701 и 1 392 707.

```
   * * *
     * *
---------
  * * * *
* * * *
---------
* * * * *
```

Рис. 25

* * *

Меняя местами цифры простого числа 1123, можно образовать 12 разных чисел. Из них 8 оказываются простыми. Вот они:

1123, 1213, 1231, 1321, 2113, 2131, 2311, 3121.

Задача 1. Таким же свойством обладает еще одно простое четырехзначное число несколько большее, чем 1123. Найдите его.

Задача 2. Среди двузначных простых чисел есть 9 таких, которые остаются простыми после перестановки цифр, — например, простое число 13 после перестановки цифр обращается в простое число 31. Найдите остальные 7 чисел.

Задача 3. Звездочками зашифровано действие умножения трехзначного числа на двузначное (рис. 25). Особенность в том, что каждая из этих звездочек скрыла простое число, т. е. либо 2, либо 3, либо 5, либо 7. Путем рассуждений и проб расшифруйте множимое, множитель и произведение.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

Врываются ко мне утрами ранними,
По комнате моей несутся вскачь,
Взвиваются веселыми спиралями
Решенья непридуманных задач.

Марина Вирта

Как это случилось? Это были дед, его сын и сын его сына. Дед передал сыну 600 книг; из них 400 книг сын деда передал своему сыну. Поэтому совместный книжный фонд двух сыновей увеличился лишь на 600 книг.

Чего больше: кофе или сливок? Завтрак Петра Петровича состоял из 6 глотков чистого кофе и 6 глотков сливок. В самом деле, первоначально чашка содержала чистый кофе (6 глотков). Предположим, что сливки, вливаемые в чашку, не перемешивались с кофе и Петр Петрович в первые три приема проглатывал только чистый кофе. В три приема он сделал $1 + 2 + 3 = 6$ глотков; сле-

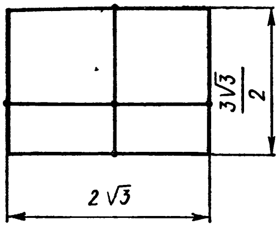


Рис. 26

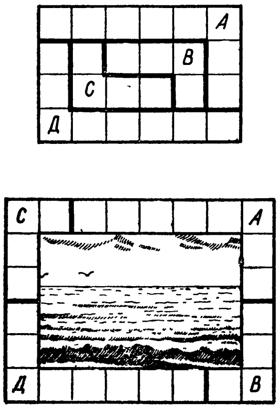


Рис. 27

довательно, выпил все кофе, при этом в чашке всякий раз оставались дополняемые сливки, постепенно заполнившие всю чашку (6 глотков). В последний прием и они были выпиты Петром Петровичем.

Однажды утром. Один ничего не ел, а остальные имели на завтрак и сосиски, и винегрет, и виноград.

Вечный скиталец. Секрет невозможности попасть в «дом Д» заключается в том, что все ячейки делятся на два множества: вида $\bigtriangledown$ и вида $\triangle$. Все ячейки вида $\bigtriangledown$ заполнены нечетными числами, а ячейки вида $\triangle$ — четными. При переходе из ячейки в соседнюю виды ячеек чередуются. Очевидно, что если путник совершает маршрут, состоящий из числа шагов, указанного в «нечетной» ячейке ($\bigtriangledown$), то непременно попадает в «четную» ячейку ($\triangle$). Если же путник очередную серию шагов совершает из ячейки $\triangle$, в которой записано четное число, то он вновь оказывается в «четной» ячейке ($\triangle$). А «дом» путника принадлежит множеству «нечетных» ячеек вида $\bigtriangledown$. Следовательно, «домой» наш путник никогда не попадет.

Алгоритм сильнее случая. Ящики надо перенумеровать и положить на платформу весов одну деталь из ящика № 1, отдельно (столбиком) две детали из ящика № 2, три — из ящика № 3, ..., десять — из ящика № 10. На платформе весов окажется 10 столбиков, объединяющих 55 деталей.

Определяем вес этих деталей и полученное число вычитаем из 55. Число десятых, содержащихся в разности, указывает номер ящика с бракованными деталями.

Случай на конференции. Следующий ответ является единственно возможным: А — француз, владел французским и английским, Б — немец, владел немецким и русским, В — англичанин, владел английским и русским, Г—русский, владел русским и французским языками.

Три сестры, ковер и письмо. В письме разметчика содержалась хитринка. Площадь листа линолеума такая же, как площадь ковра: 9 м^2, но ковер квадратный, а о форме листа линолеума раскройщик умолчал.

По-видимому, это был прямоугольный лист длиной $2\sqrt{3}$ м и шириной $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ м. Один разрез делит сторону пополам, другой — в отношении 1 : 2 (рис. 26).

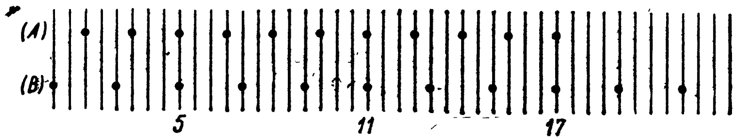


Рис. 28

Случай в автобусе. Пять пассажиров должны уплатить 25 копеек. Для этого требуется 2 монеты. Кроме того, у каждого пассажира после уплаты должно остаться по крайней мере по одной монете (каждый должен получить какую-то сдачу, так как никто не имел пяти копеек). Следовательно, у пяти пассажиров должно быть не менее 7 монет.

Рамка для картины. Решение см. на рисунке 27.

В музее часов. Построим ряд параллельных отрезков, промежутки между которыми будем считать «изображением» секунд. Точками изобразим «фотографию» ударов боя первых (А) и вторых (В) часов соответственно условию задачи (рис. 28).

«Фотография» звуков показывает, что под номерами 5, 11, 17 удары происходят одновременно и на слух сливаются каждый раз в один удар. Максимальное число ударов для каждых часов в отдельности равно 12, но если это было так, то мы насчитали бы 21 удар (это легко проверить по «фотографии» звуков). На рисунке показана «фотография» 19 ударов, соответствующая 11 раздельным ударам часов А и В. Значит, часы показывали 11.

В лекционном зале больницы. Условию задачи удовлетворяет только следующий ответ: 27 врачей мужчин, 3 врача женщины, 3 сестры, 2 выздоровевших мужчины. К этому ответу приводит система уравнений:

$$\begin{cases} x + y + s + t = 35 \\ x + y = 5\,(y + s), \end{cases}$$ где x — число врачей мужчин,

y — число врачей женщин, s — число сестер, t — число выздоровевших (из условия следует, что выздоровевшие — мужчины).

Исключая x, получим: $5y + 6s + t = 35$. Предположим, что $y = 1$, тогда $6s + t = 30$. Так как по условию должно быть $s > t$, то получившееся уравнение не имеет целых положительных корней.

Предположим, что $y = 2$, тогда $6s + t = 25$. При условии $s > t$ это уравнение имеет только одну пару корней: $s = 4$, $t = 1$. Но от этого решения приходится отказаться, так как в зале больницы находилось «несколько выздоровевших»; следовательно, должно быть $t > 1$. Полагаем далее: $y = 3$, тогда $6s + t = 20$. Подходит: $s = 3$, $t = 2$. Это приводит к $x = 27$.

Пробуя еще три возможных значения: $y = 4$, $y = 5$ и $y = 6$, легко убедиться в том, что подходящих значений для s и t не получится.

Доярка и журналисты. По высказанным предположениям Фаина обслуживает не меньше 30 коров и не больше 53. При этом наибольшая погрешность, указанная Фаиной, равна 12. Это значит, что действительное число коров либо $30 + 12 = 42$, либо $53 - 12 = 41$.

Нетрудно убедиться простой проверкой, что только число 41 удовлетворяет всем условиям задачи. Фаина обслуживает 41 корову.

Сколько сыновей и внуков? Из условия следует, что число внуков должно быть полным квадратом. В промежутке (50—80) есть только один полный квадрат: 64. Значит, у старика 8 сыновей и у каждого сына также по 8 сыновей, всего сыновей в этой компании:

$$8 + 8 \cdot 8 = 72.$$

Загадочные указатели расстояний. Если на первом указателе цифра десятков x, а цифра единиц y, то первое замеченное число $10x + y$, второе $10y + x$ и третье $100x + y$.

Так как числа эти появлялись через равные промежутки времени при постоянной скорости поезда, то $(10y + x) - (10x + y) = (100x + y) - (10y + x)$. После преобразований: $y = 6x$. Но x и y однозначные, поэтому возможно единственное предположение, что $x = 1$, $y = 6$. Числа на указателях: 16, 61, 106. Скорость поезда 45 км/ч.

Задача с изюминкой. Логически кратчайшее решение: 50 раз кладем гири парами; 1 г — на левую чашку весов, 2 г — на правую и т. д. Каждая такая пара гирь дает превышение на правой чашке весов на 1 грамм. Следовательно, полное превышение массы — 50 г.

Алгебраически: известно, что сумма n последовательных нечетных чисел, начиная с 1, дает n^2, а сумма n четных чисел, начиная с 2, равна $n(n + 1)$. Значит, разность масс равна $n(n + 1) - n^2$. После раскрытия скобок получается n, а n по условию равно 50.

Почему у Вали он бывает чаще? Причина, по которой юноша чаще ездил в северном направлении, к Вале, заключается в особенностях расписания движения поездов. В период после полудня «южный» поезд приходил на платформу «Спутник» регулярно через 2 минуты после прихода «северного» поезда; следовательно, «южный» поезд мог быть первым для юноши только тогда, когда юноша приходил на платформу именно в течение этих двух минут. Если же он приходил на платформу в течение остальных восьми минут промежутка между поездами, то попадал на поезд, идущий в северном направлении. Вероятность этого случая равна $8/10 = 4/5$. Естественно, что при большом числе поездок юноша чаще попадал к Вале и реже к Толе.

История одного занятного конкурса. «Изюминка» задачи в том, что в комплекте из 50 пар одинаковых схем не может быть неправильно подобрана только одна пара, так как 49 правильно подобранных пар автоматически ведут к правильному подбору оставшейся пары.

Это значит, что число лиц, приславших комплект только с одной неправильно подобранной парой, равно нулю и, следовательно, число участников конкурса, сделавших ошибки только в трех парах, равно 18.

Пусть всех участников конкурса x, из них правильно решивших y. В таком случае число участников конкурса, неправильно подобравших только две пары, также равно y. Составляем уравнение:

$$18 + 2y + \frac{98,1}{100}x = x \Rightarrow 18 + 2y = \frac{19}{1000}x.$$

Теперь нетрудно подобрать целые положительные x и y, удовлетворяющие уравнению. Число $18 + 2y$ должно быть равно или кратно числу 19. Ближайшее подходящее значение $y = 10$, тогда $x = 2000$. Следующее подходящее значение $y = 29$, тогда $x = 4000$. Подбор на этом прекращаем, так как уже вторая пара решений не удовлетворяет решению задачи ($x \leqslant 3000$). Значит, участников конкурса 2000 человек, победителей 10.

Восстановление события. Так как $2^9 < 601 < 2^{10}$, то бункер получил 10 импульсов. Самое большое изменение количества деталей в бункере равно $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9 = 1023$. Пусть сумма всех убылей, скажем, x, сумма пополнений y, тогда $x + y = 1023$ и $x - y = 601$. Следовательно, $x = 812$, $y = 211$. Теперь 211 надо представить как сумму степеней числа 2, или, иначе говоря, записать число 211 в двоичной системе счисления $(211)_{10} = (11010011)_2$, так как $211 = 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^1 + 2^0$. Теперь ясна картина прошедшего события: пополнение бункера происходило на первом, втором, пятом, седьмом и восьмом импульсах ($1 + 2 + 2^4 + 2^6 + 2^7$ деталей), а убыль — на третьем, четвертом, шестом, девятом и десятом импульсах ($2^2 + 2^3 + 2^5 + 2^8 + 2^9$ деталей). Зеленая и красная лампочки загорались по 5 раз.

Во всем нужна сноровка... Для калибровки любого валика с помощью стальной плиты с пятнадцатью отверстиями требуется не более четырех проб.

Сначала надо сравнить валик со *среднним* отверстием (с восьмым). Предположим он вставился; значит, нет нужды испытывать валик на больших отверстиях — отпадает половина отверстий — и для второй пробы надо сравнивать валик со *средним* отверстием *левой* половины плиты (с четвертым) — отпала еще четвертая часть всех отверстий плиты. Предположим, что валик опять вставился, тогда для третьей пробы вновь выбираем среднее отверстие из оставшихся *слева* от четвертого (второе). Пусть валик вставился. В этом случае сдвигаемся *вправо* и интересуемся отверстием средним между вторым и четвертым. Если в это отверстие (третье) валик вставляется, то его калибр между диаметрами третьего и четвертого отверстий, если же не вставляется, то его калибр между диаметрами второго и третьего отверстий.

«Арарат» — «Кайрат» — с каким счетом? С учетом сообщенных данных нетрудно составить перечень возможных исходов в пятнадцати играх: 1 — 0, 2 — 0, 2 — 1, 3 — 0, 3 — 1, 4 — 0, 3 — 2, 4 — 1, 5 — 0, 4 — 2, 5 — 1, 6 — 0, 4 — 3, 5 — 2, 6 — 1.

Только такой перечень обеспечивает наименьшую возможную сумму всех очков: 71. Например, нельзя было бы пятнадцатой парой предположить 5 — 3, вместо 6 — 1, так как $5 + 3 > 6 + 1$.

Те же сведения позволяют распределить исходы между командами в порядке занятых ими мест:

№ места команды	1	2	3	4	5	6
1	—	5 — 2	6 — 1 или 5 — 1	5 — 1 или 6 — 1	6 — 0 или 5 — 0	5 — 0 или 6 — 0
2	2 — 5	—	4 — 3	$\boxed{4 — 2}$	4 — 1	4 — 0
3	1 — 6 или 1 — 5	3 — 4	—	3 — 2	3 — 1	3 — 0
4	1 — 5 или 1 — 6	$\boxed{2 — 4}$	2 — 3	—	2 — 1	2 — 0
5	0 — 6 или 0 — 5	1 — 4	1 — 3	1 — 2	—	1 — 0
6	0 — 5 или 0 — 6	0 — 4	0 — 3	0 — 2	0 — 1	—

Сопоставляя таблицу с известными фактами заключаем:

команда «Заря» на пятом месте, «Пахтакор» — на шестом месте; «Нефтчи» — на третьем месте, а команда «ЦСКА» — на первом. Хотя у нас нет достаточных оснований, чтобы определить, какая из оставшихся двух команд заняла второе место: «Арарат» или «Кайрат», но исход их встречи определился: 4 — 2.

Черная или рыжая? О т в е т. Рыжая.

Пятак в руках находчивого ученика. В результате построения окружностей O_1 и O_2 имеем: $O_1A \# PO_2$. Пара окружностей O_2 и O_3 дает: $PO_2 \# O_3Q$. Далее: $O_3Q \# RO_4$, $RO_4 \# O_5S$ и, наконец, $O_5S \# BO_1$. Получаем: $O_1A \# BO_1$, откуда и следует, что точка B диаметрально противоположна точке A.

Сколько лет сыновьям? Составим табличку, содержащую все возможные разбиения 36 на 3 сомножителя.

Возраст сыновей			Сумма возрастов
36	1	1	38
18	2	1	21
12	3	1	16
9	4	1	14
9	2	2	13
6	6	1	13
6	3	2	11
4	3	3	10

Поскольку приятель по числу окон (т. е. по сумме возрастов) не мог однозначно определить возраст сыновей, значит, число окон в доме равно 13 — лишь это число фигурирует дважды, поэтому имеет место одна из двух возможностей: (9, 2, 2) или (6, 6, 1).

Замечание Н. о том, что возраст одного из сыновей больше возрастов остальных, определяет первую возможность. Итак, старшему сыну 9 лет, а двум другим по 2 года.

Семья чудаков. Рыбак. Пружина весов растягивается под действием веса рыбы и равной ему силы натяжения бечевки по другую сторону блока.

Следовательно, масса сома 7,5 кг, если пренебречь массой блока и бечевки.

Кулинарка. «Пустить» четырехминутные и семиминутные песочные часы одновременно. Первые вновь опрокинуть немедленно после их остановки (через 4 мин). Пройдет еще 3 мин — «остановятся» вторые часы. Немедленно их опрокинуть. Когда через минуту опустеет верхняя колбочка первых часов (всего пройдет 8 мин), опрокинуть вторые. Там высыпался песок, отмечающий одну минуту. После опрокидывания вторых часов этот песок вернется в ту колбочку, где был за минуту до этого, — так закончится последняя, девятая минута.

Программист. **1.** Кладем на чашки весов по одной, произвольно взятой дыне и более тяжелую отмечаем ярлыком Т, а другую — ярлыком Л.

2. Аналогично действуем с любыми двумя дынями из оставшихся трех; отметим их ярлыками $Т_1$ и $Л_1$.

3. Сравним дыни Т и $Т_1$. Пусть для определенности $Т > Т_1$. Три дыни упорядочены: Т, $Т_1$, $Л_1$; дыню Л отложим в сторону.

4 и **5.** Самое большое за две операции сравнения тяжестей дынь можно определить место последней неотмеченной дыни в последовательности Т, $Т_1$, $Л_1$.

6 и **7.** Зная, что отложенная дыня Л легче, чем дыня Т, самое большое за две операции сравнения точно устанавливаем и ее место.

Школьник. Каждая группа из трех отрезков образует треугольник, поэтому число треугольников равно $C_6^3 = 20$.

Капитан и его сын. Расшифровка деления в предположении описки: 102508 : 49=2092 и 8963,9 : 29=309,1; 2463,3 : 23=

$= 107{,}1$. Указание. Надо найти все двузначные числа (делитель), кратные которым имеют вид $2*$ и $**1$, и проверить их.

Капитан вложил в шкатулку 272 руб, а деление $(272 : 8 = 34)$ и запись кодового числа выполнил в троичной системе счисления: $101002_3 : 22_3 = 1021_3$. Это решение получится, если испытать все двузначные числа (делитель), записанные в троичной системе, произведение каждого из которых на 1 и 2 имеет вид $2*$ и $**1$.

В «фокусе сложения» использованы соответственно системы счисления с основанием 10, 9, 8, 12.

Кладовщик. *Первое взвешивание.* Перенумеруем коробки и первые пять поставим на левую чашку весов, следующие пять — на правую.

Если равновесие, то нестандартные детали — в коробке № 11. Если равновесия нет, то коробка № 11 содержит стандартные детали. При этом допустим для определенности, что вниз пошла левая чашка весов (стрелка весов отклонилась влево).

Второе взвешивание. Уберем коробку № 1 с левой чашки и коробку № 10 — с правой. Заменяем одну деталь из коробки № 3 одной деталью из коробки № 11, т. е. заведомо стандартной, две детали из № 4 — двумя деталями из № 11, три детали из № 5 — тремя деталями из № 10; заменяем 4 детали из № 6, 5 деталей из № 7, 6 деталей из № 8 и 7 деталей из № 9 соответственно таким же количеством деталей из № 11.

Тогда, если

(а) стрелка весов отклонилась влево на столько же делений, как и при первом взвешивании, то нестандартные детали — в коробке № 2 (и более тяжелые);

(б) равновесие, то нестандартные детали — в коробке № 1 (и более тяжелые);

(в) отклонение уменьшилось на одно деление или на два, то нестандартные детали соответственно — в коробке № 3 или № 4 (и более тяжелые);

(г) отклонение уменьшилось на 4, 5, 6, 7 делений, то нестандартные детали соответственно — в коробках № 6, № 7, № 8, № 9 (и более легкие);

(д) отклонение уменьшилось на 3 или на $n - 3$ деления, где n — число деталей в коробке, то нестандартные детали соответственно — в коробке № 5 или № 10 (по условию $n > 10$).

«Логик». Способ объяснения «малярного» парадокса определяется точкой зрения на площадь, объем и краску.

1. Если краска молекулярна, как в действительности, то невозможно ни окрасить «все» осевое сечение, ни заполнить «все» тело краской, так как начиная с некоторого места зазор между краской и осью Ox или диаметр бесконечно длинного «горлышка» тела вращения окажется меньше диаметра молекулы.

2. Если краску понимать, как некоторую непрерывную субстанцию, то как для окраски, так и для заполнения объема достаточно иметь некоторый конечный запас краски, но процесс окрашивания и заполнения будет бесконечным, как процесс приближения к пределу.

3. Если краска, накладываемая на плоскую фигуру, не имеет толщины, т. е. является такой же математической абстракцией, как и сама плоскость, то сопоставление окрашивания и заполнения емкости лишено смысла, как лишено смысла сравнение площади и объема.

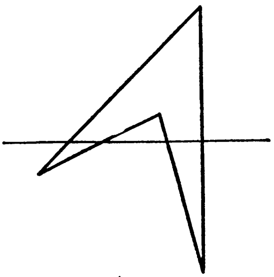


Рис. 29

Логическая задача. Ответ.

ABCD YXWZ

Первоначальный импульс...

1) Ответ показан на рисунке 29. «Самоограничение» очевидно: упускается, что четырехугольник может быть и не выпуклым.

2) Если бараны стоят в одну линию, но не хвостами друг к другу, а головами, то это тоже значит «рядом». И условие задачи выполнено, и ответ на вопрос получается: «Могут».

3) Если дать одному ребенку двух щенков, а остальным двум — по одному щенку, то условие задачи будет выполнено.

4) Из условия задачи не следует, что все четверо подошли к одному берегу. Если же было так, что двое подошли к одному берегу, а двое — к противоположному, то действительно каждая пара охотников могла переправиться на другую сторону реки так, чтобы и лодка осталась у причала после их переправы.

Поможем Золушке. Банки в 10, 11 и 13 л обозначим соответственно цифрами I, II и III. Сначала надо наполнить соком банку III, а из нее отлить 10 л в банку I, тогда в банке III останется 3 л сока.

Теперь надо половину содержимого банки I, т. е. 5 л, отлить в банку II. Как это сделать? (Именно в этой операции вся «изюминка» задачи.) Надо отлить на глаз около половины банки, затем, наклонив банку I, посмотреть, касается ли плоскость жидкости наклоненного края отверстия банки и приподнятого края дна (как на рисунке 30). Отливая или доливая сок, можно добиться такого положения. Это и будет означать, что в банке I осталась ровно половина первоначального количества сока, т. е. 5 л.

Теперь 13 л сока распределились так: в банке I — 5 л, в банке II — 5 л и в банке III — 3 л.

Перельем 3 л из банки III в банку II — и первая порция сока готова (8 л в банке II).

Вновь наполняем банку III и отливаем 10 л в банку I. Теперь п о л о в и н у содержимого банки I отливаем в бочонок, а к оставшимся 5 л добавляем 3 л из банки III.

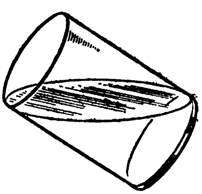


Рис. 30

■	$^{1}7$	$^{2}3$	■	$^{3}5$	$^{4}5$
$^{5}1$	9	4	$^{6}1$	■	6
$^{7}7$	3	■	4	■	■
■	■	$^{8}6$	■	$^{9}2$	$^{10}6$
$^{11}4$	■	$^{12}4$	$^{13}2$	2	5
$^{14}1$	6	■	$^{15}1$	5	■

Рис. 31

В результате в банке I образуется вторая порция сока (8 л).

Весь сок, оставшийся в бочонке, выливаем в банку III. Это будет третья порция сока в 8 л.

Мы очень рады, что помогли Золушке, если она сама еще не догадалась поступить так же.

Продолжение сказки. Из непрозрачных закрытых банок теперь не отольешь половину содержимого, но выход из положения есть и в этом случае.

Надо из бочонка наполнить 13-литровую банку; в бочонке останется 11 л. Из 13-литровой банки наполнить 10-литровую, а оставшиеся 3 л вылить в 11-литровую банку. Из 10-литровой банки вылить сок в 13-литровую и дополнить ее тремя литрами из бочонка, в котором было 11 л. После этого в бочонке образуется первая порция в 8 л. Перелить 3 л сока из 11-литровой банки в 10-литровую и 10-литровую банку вставить в открытую 11-литровую банку, из 13-литровой банки вливать сок в 11-литровую банку. Помещенная внутрь 10-литровая банка всплывет и так как в ней все же содержится 3 л сока, то вследствие этого в 11-литровую банку вместится только 8 л сока из 13-литровой банки. (Весом и объемом материала 10-литровой банки пренебрегаем.) Это вторая порция в 8 л.

В 13-литровую банку к оставшимся в ней 5 л сока добавить 3 л, содержащиеся в 10-литровой банке, — получится третья порция в 8 л.

Проделки черта под Новый год. Пусть студент должен был получить x руб, y коп., т. е. $100x + y$ коп. Кассир по ошибке выдал $100y + x$ коп. В соответствии с условием: $100y + x - 5 = 2(100x + y)$. Так как x и y — целые положительные числа, причем $y < 100$, то легко установить, что $x = 31$, $y = 63$. Студент должен был получить 31 руб. 63 коп.

Кросс чисел (рис. 31). Имя студента — Олег. Он приехал в Москву учиться из Казани. (От Казани до Москвы по железной дороге 793 км.)

Примечание к № 14 по горизонтали: уравнение $x^2 + y^2 = 65$ имеет точно 16 пар целых корней:

$(\pm1;\ \pm8)$; $(\pm8;\ \pm1)$;

$(\pm4;\ \pm7)$; $(\pm7;\ \pm4)$—в каждой паре по 4 комбинации знаков.

В котором часу ложился спать Онегин? Для суточного завода требовалось $9 + 11 = 20$ полных оборотов головки часов. Промежуток времени x от 8^{30} утра до второго завода часов составляет такую же часть суток, какую составляет число 11 от 20. Имеем: $x : 24 = 11 : 20$. Откуда $x = 13$ ч 20 мин. Значит, Онегин ложился спать в 8 ч 30 мин + 13 ч 20 мин = 21 ч 50 мин, т. е. около 10 часов вечера.

60	198	192
282	150	18
108	102	240

$\rightarrow$

61	199	193
283	151	19
109	103	241

$\downarrow$

59	197	191
281	149	17
107	101	239

Рис. 32

29	269	1049	149
1061	137	101	197
179	1019	239	59
227	71	107	1091

Рис. 33

Бездельник и черт. Уравнение задачи: $8x - 7n = 0 \Rightarrow x = \frac{7n}{8}$. Наименьшее натуральное решение: $x = 7$ коп. После каждого удвоения количества денег бездельник отдавал 8 коп.

Мастер, принцесса и солдат. Мастер получил 1350 жемчужин и составил магический квадрат (рис. 32). После прибавления или удаления девяти жемчужин получаются магические квадраты, элементами которых являются пары простых чисел-близнецов (рис. 32).

Модель магического квадрата 4×4, все элементы которого — простые числа, представлена рисунком 33. Если каждый элемент увеличить на две единицы, то вновь образуется магический квадрат, состоящий только из простых чисел.

Как еще можно складывать числа. Пусть $S_n = 1 + 2 + \ldots + n$. Складывая элементы таблицы по горизонталям и вертикалям, получаем:

$$\sum_{n=1}^{n} n^2 = n \cdot S_n - (S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1}) = \frac{n^2(1+n)}{2} - (1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{(n-1)n}{2}.$$

Воспользуемся формулой (5) на с. 71, тогда

$$\sum_{n=1}^{n} n^2 = \frac{n^2(1+n)}{2} - \frac{(n-1)n(n+1)}{2 \cdot 3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{n} n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Именные и безымянные числовые треугольники. По условию, строка под номером n состоит из n последовательных нечетных чисел, наименьшее из которых обозначено через a_n. Последний, наибольший член той же строки обозначим через b_n. Очевидно,

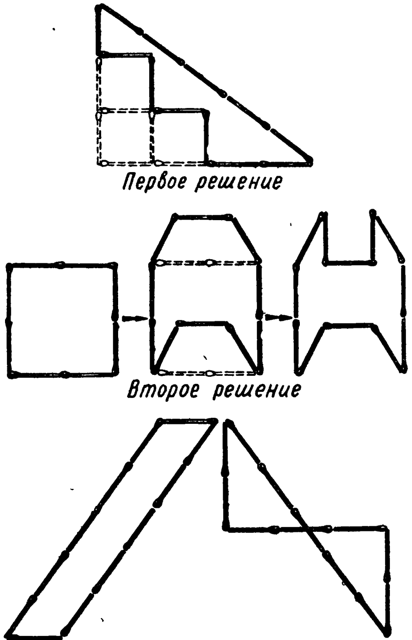


Рис. 34

что, зная a_n, легко вычислить b_n, прибавляя к a_n число 2, повторенное $n-1$ раз: $b_n = a_n + 2(n-1)$.

Отсюда для $(n-1)$-й строки имеем: $b_{n-1} = a_{n-1} + 2(n-2)$.

Из указанного в условии способа образования строк следует также, что $a_n = b_{n-1} + 2$. Заменив в этом выражении b_{n-1}, получим: $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$ или $a_n - a_{n-1} = 2(n-1)$. В этой формуле будем полагать $n = 2, 3, \ldots, n-1$. Тогда

$$a_2 - a_1 = 2$$
$$a_3 - a_2 = 4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-1} - a_{n-2} = 2(n-2)$$
$$a_n - a_{n-1} = 2(n-1).$$

Складывая эти равенства, получаем:

$$a_n - a_1 = 2(1 + 2 + \ldots + (n-1)) = n(n-1).$$

Отсюда $a_n = a_1 + n(n-1) = n^2 - n + 1$.

Зная, что слагаемых в каждой строке n, а $d = 2$, легко убеждаемся в том, что сумма чисел в n-й строке равна n^3.

Встречные поезда. В момент встречи машинистов расстояние между кондукторами будет $250 + 250 = 500$ м. Кондукторы сближаются со скоростью $60 + 60 = 120$ км/час, или $100/3$ м/с.

Искомое время равно $500 : \frac{100}{3} = 15$ с.

Найти очертание фигуры. *Первое решение.* Из 12 спичек сложить прямоугольный треугольник с катетами в 3 и 4 спички и гипотенузой в 5 спичек. Снять четыре спички, образующие прямой угол, и переложить их ступеньками (рис. 34). Площадь образовавшейся фигуры содержит 3 ед.^{2}.

Второе решение, Предложение Н. И. Аржанова: построить квадрат, содержащий 4 ед.^{2}, превратить в равновеликую фигуру, как показано на рис. 34, один квадрат вынуть. Получившаяся фигура имеет площадь 3 ед.^{2}.

Третье решение. Предложение В. И. Лебедева: построить параллелограмм с основанием в одну спичку и высотой в три спички (рис. 34).

Четвертое решение. Построение, показанное на рисунке 34, предложено С. М. Козиком.

Задача разметчика. На рисунке 35 показано разделение квадрата 3×3 на 6 непересекающихся квадратов. Очевидно, что любой квадрат $n \times n$ $(n \geqslant 2)$ аналогично может быть разделен на $k=2n$ непересекающихся квадратов. Разделяя теперь любой из получившихся квадратов на 4 непересекающихся квадрата (пунктир на рис. 35), получим: $k = 2 \cdot n + 3$ квадратов. Следовательно, получилось конструктивное доказательство возможности разрезать квадрат $n \times n$ на любое число $k \geqslant 6$ квадратов, разделяя сторону квадрата только на целое число частей.

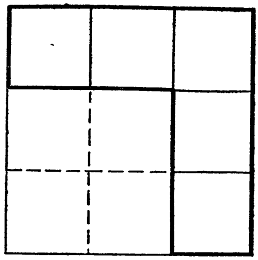


Рис. 35

На выставке художественных изделий. Решение показано на рисунке 36.

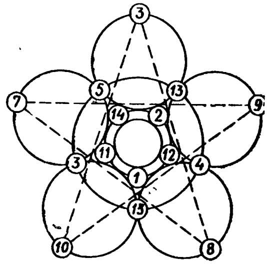


Рис. 36

Зашифрованная арифметика. а) ЯЯЯ $=$ $=$ Я $\cdot$ 111 $=$ Я $\cdot$ 3 $\cdot$ 37. Положим МА $=$ $= 37$, тогда ДА < 30, кратно 3 и А $=7$. Подходит только ДА$=27$ и $27 \cdot 37 = 999$; б) $4865 + 191 + 4790$; в) $534 + 534 + + 6842 = 7910$; г) В десятичной системе счисления $255 \cdot 835$, если $b = 11$, то $344 \cdot 524$; здесь E — символ «цифры» 10.

Площадь сада — по числу яблонь. Выделим внутри многоугольника какой-либо прямоугольник с длинами сторон a и b, вершины которого — в узловых точках (рис. 37). Так как в каждой узловой точке — яблоня, то на границах выделенного прямоугольника находится $M=2(a+b)$ яблонь, а внутри прямоугольника $N = = (a - 1) \cdot (b - 1)$ яблонь. Так как его площадь $S = a \cdot b$, то

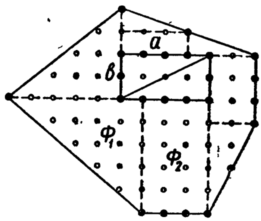


Рис. 37

$$S = N - 1 + \frac{M}{2} \text{ (ед}^2\text{)}. \qquad (1)$$

Диагональю разобьем прямоугольник на два треугольника и предположим, что на отрезке гипотенузы растут C яблонь. В число C не будем включать яблони, расположенные на концах гипотенузы. Число Q яблонь внутри каждого из этих треугольников и число R яблонь на его границах равны соответственно

$$Q = \frac{N-C}{2} \text{ и } R = \frac{M}{2} + 1 + C.$$

Выразим N и M и подставим в (1); получим площадь треугольника $S/2 = Q - 1 + \frac{R}{2}$ (2). Получившаяся формула (2) имеет

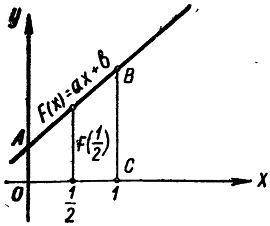


Рис. 38

ту же структуру, что и формула (1).

Разобьем многоугольник на прямоугольники и прямоугольные треугольники с вершинами в узловых точках и покажем, что для площади любой пары соприкасающихся фигур (Φ_1 и Φ_2), рассматриваемых как одна фигура (Φ), справедлива формула вида (1).

Пусть площади фигур Φ_1 и Φ_2 соответственно $S_1 = N_1 - 1 + \frac{M_1}{2}$ и $S_2 = N_2 - 1 + \frac{M_2}{2}$, где N_1 и N_2 — значения N, а M_1, M_2 — значения M для этих фргур. Тогда площадь объединенной фигуры $S = S_1 + S_2$. Чтобы привести этот результат к виду (1), надо узловые точки (кроме крайних), принадлежащие линии соприкосновения фигур Φ_1 и Φ_2, считать внутренними для Φ, а не периферийными, какими они были для Φ_1 и Φ_2. Пусть таких точек k. Это значит, что сумма ($N_1 + N_2$) внутренних для Φ узловых точек увеличится на k, т. е. будет $N = N_1 + N_2 + k$, а сумма ($M_1 + M_2$) периферийных для Φ узловых точек уменьшится на ($2k+2$), т. е. будет $M = M_1 + M_2 - (2k + 2)$. С учетом этого получим:

$$S = N_1 + N_2 - 2 + \frac{M_1 + M_2}{2} = N - k - 2 + \frac{M + 2k + 2}{2} = N - 1 + \frac{M}{2}.$$

Заключаем: формула (1) справедлива для площади всякого многоугольника, удовлетворяющего заданным условиям.

Подберите формулу. а) Из условия следует: f — периодическая функция с периодами $T_1 = 1$ и $T_2 = \sqrt{3}$. Но здесь $T_2 \neq k \cdot T_1$, $k \in Z$, как должно быть для всякой периодической функции, не являющейся константой. Значит, искомая функция — константа и ее аналитическое выражение $f(x) = \sqrt{3}$.

б) Испытаем $F(x) = ax + b$ (рис. 38).

$$S_{OABC} = \int_0^1 (ax + b)\, dx \text{ и } S_{OABC} = F\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1.$$

Следовательно, $ax + b$ —искомая формула; a, b — произвольные числа.

Размещение разноцветных квадратиков. Решим сначала вспомогательную задачу. Предположим, что мы размещаем в 16 клетках квадрата по 4 раза каждую из четырех букв: Ж, Ч, К, С (начальные буквы названий заданных красок) — таким образом, что в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждой из двух диагоналей не будет одинаковых букв. Из этого условия следует, что угловые клетки надо занять различными буквами, разместив их в произвольном порядке (рис. 39, a). В средних клетках диа-

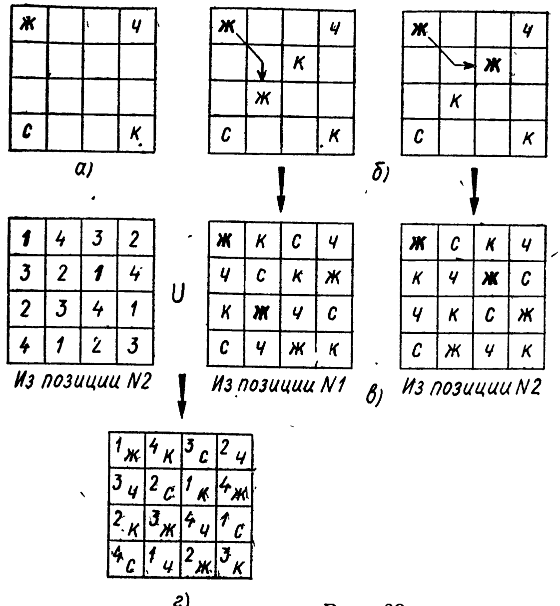


Рис. 39

гонали, содержащей буквы Ч и С, должны стоять буквы Ж и К. Их можно поставить двумя способами (рис. 39, *б*). Буква, занимающая клетку в левом верхнем углу, дублируется ходом шахматного коня по диагонали и вниз или по диагонали и вправо. Первый из этих вариантов расположения шести букв назовем исходной позицией № 1, а второй — исходной позицией № 2.

После того как указанные 6 клеток заполнены буквами, остальные клетки в соответствии с условием могут быть заполнены единственным образом (рис. 39, *в*).

Так как 4 буквы в угловых клетках можно разместить 24 способами, то каждая из двух исходных позиций дает серию буквенных (красочных) квадратов по 24 варианта в каждой серии. Всего 48 решений промежуточной задачи.

Далее. Пусть тем же приемом отдельно выполнено размещение четырех комплектов чисел (1, 2, 3, 4) по клеткам квадрата. Из двух аналогичных исходных позиций (№ 1 и № 2) также образуются две серии числовых квадратов по 24 варианта в каждой серии.

Теперь, чтобы получить решение, требуемое условием основной задачи, достаточно наложить любой буквенный (красочный) квадрат из п е р в о й серии на любой числовой квадрат из в т о р о й серии и любой буквенный квадрат из в т о р о й серии на любой числовой квадрат из п е р в о й серии. Примерное решение представлено на рисунке 39, *г*.

Почему нельзя «складывать» буквенный и числовой квадраты, если оба взяты из одной серии, видно на примере (рис. 40, *а*).

а)

1	4	3	2
3	2	1	4
2	3	4	1
4	1	2	3

Из серии №2

∪

ж	с	к	ч
к	ч	ж	с
ч	к	с	ж
с	ж	ч	к

Из серии №2

=

1ж	4с	3к	2ч
3к	2ч	1ж	4с
2ч	3к	4с	1ж
4с	1ж	2ч	3к

↔ *Не удовлетворяет условию задачи*

б)

1	3	4	2
2	4	3	1
3	1	2	4
4	2	1	3

Из серии №1

∪

ж	с	к	ч
к	ч	ж	с
ч	к	с	ж
с	ж	ч	к

Из серии №2

=

1ж	3с	4к	2ч
2к	4ч	3ж	1с
3ч	1к	2с	4ж
4с	2ж	1ч	3к

↔ *Удовлетворяет условию задачи*

Рис. 40

Если же, сохраняя числа в угловых клетках, поменяем местами числа 1 и 3 в диагональных клетках, возникает числовой квадрат из серии № 1. В объединении с буквенным квадратом из серии № 2 он образует одно из решений (рис. 40, *б*).

Всех различных решений будет, следовательно, $(24 \cdot 24) \cdot 2 = 1152$.

В моей книге «Математическая смекалка» («Наука», 1965 и предыдущие годы) ошибочно предполагалась независимость решения от принадлежности объединяемых буквенного и числового квадратов к одной или разным сериям (задача № 115), что привело к преувеличенному числу возможных решений. Пользуюсь возможностью извиниться перед читателями за допущенную оплошность.

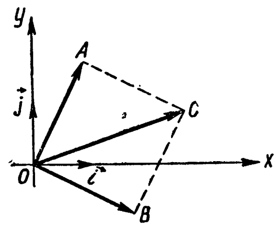


Рис. 41

Координатно-геометрический способ. В прямоугольной системе осей Ox и Oy с единичными векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$ построим $\overrightarrow{OA}(1; 2)$ и $\overrightarrow{OB}(2; -1)$ (рис. 41). Тогда $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}(3; 1)$. Так как $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$ и $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \cdot 2 + 2(-1) = 0$, то $ABCD$ — квадрат;

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} = \widehat{BOx};\ \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \widehat{xOC};$$

$$\widehat{BOC} = \widehat{BOx} + \widehat{xOC} \Rightarrow \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

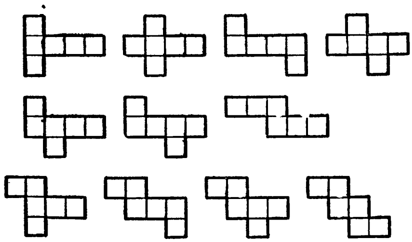


Рис. 42

Раскуси задачку — скушаешь орешки. Наибольшее возможное число кочевавших из пакета в пакет орехов $2^0+2+2^2+\ldots+$ $+2^9=1023$ штуки. Пусть в процессе решения десяти задач x орехов перекладывалось в пакет сына и y — в пакет мамы. Тогда $x+y=1023$, $x-y=$ $=601 \Rightarrow x=812$, $y=211$. Число 812 в двоичной системе: 1100101100. Места, занятые единицами в записи этого числа — справа налево, — указывают порядковые номера решенных задач. Сын решил *третью*, *четвертую*, *шестую*, *девятую* и *десятую* задачи.

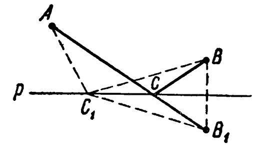


Рис. 43

Развертки куба. Куб имеет 11 разверток различных форм (рис. 42). Из них в шести формах четыре грани куба развертываются в одну полоску, в четырех формах не более трех граней в полоске, в одной — не более двух граней в полоске.

Наименьшее из возможных. Так как $225 = 25 \cdot 9$, то искомое число должно делиться на 9 и на 25. Исходя из признака делимости на 9 и условия задачи, соображаем, что число должно состоять из девяти единиц и оканчиваться двумя нулями (для делимости на 25).

Итак, искомое число 11 111 111 100.

Задача впрок. $\frac{1}{x}+x=1 \Rightarrow x^2+1=x \Rightarrow x^2=x-1 \Rightarrow x^3=$ $=x^2-x \Rightarrow x^3=x-1-x \Rightarrow x^3=-1 \Rightarrow x^6=1 \Rightarrow x^7=x \Rightarrow x^7+$ $+\frac{1}{x^7}=x+\frac{1}{x}=1.$

Путь познания увлекателен, но не усыпан розами. Конечно, решением задачи является только точка C (рис. 43). Но логический изъян в доказательстве состоял в том, что вместо особенностей интересующей нас суммы $|AC|+|CB|$ рассматривались особенности суммы $|AC|+|CB_1|$. Верно, что эти суммы равны, но, в то время как сумма $|AC|+|CB_1|$ при любом положении точки C на прямой PQ обеспечивает наименьшее расстояние между точкой A и точкой B_1, лежащей на продолжении AC, сумма $|AC|+|CB|$ будет наименьшей не при любом расположении точки C на прямой PQ. Вот это и надо доказывать. Надо, кроме первоначально полученной точки C, взять еще какую-либо точку C_1 на прямой PQ. Тогда $|AC_1|+|C_1B_1|>|AB_1|$. Но так как $|BC_1|=|C_1B_1|$, то $|AC_1|+|C_1B|=|AC_1|+|C_1B_1|$ и $|AC_1|+|C_1B|>|AB_1|$ или

$$|AC_1|+|C_1B|>|AC|+|CB|.$$

Это и значит, что тропинка $|AC|+|CB|$ будет короче любой другой тропинки $|AC_1|+|C_1B|$.

Две «фотографии» трех средних. Из $\frac{ab}{a+b}=n \Rightarrow ab-an-$ $-bn+n^2=n^2 \Rightarrow (a-n)(b-n)=n^2$. Пусть $n^2=u\cdot v$, тогда $a=n+u$, $b=n+v$. Полагаем последовательно $n=1, 2, 3, \ldots$

и разлагаем n^2 на два целых неравных сомножителя. Для $n = 1$ нет подходящих u и v. Для $n = 2$ имеем: $u \cdot v = 4 \Rightarrow u = 1$, $v = 4 \Rightarrow a = 3$, $b = 6$.

Среднее гармоническое $\frac{2ab}{a+b} = 4$. Для $n = 3$, $u \cdot v = 9 \Rightarrow u = 1$, $v = 9 \Rightarrow a = 4$, $b = 12$, $\frac{2ab}{a+b} = 6$ и т. д.

Гармоническая последовательность и музыкальные интервалы.

1. Заменив все члены выражения $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2}$, кроме первого (т. е. всего $n^2 - n$ членов), наименьшим из них, равным $\frac{1}{n^2}$, получим неравенство

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n} + \frac{n^2-n}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1,$$

что и требовалось доказать.

2. Общий член $u_n = \frac{1}{1+2+\ldots+n} = \frac{2}{n(1+n)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right) + \ldots \to 2$ при $n \to \infty$.

Задача. Пусть x таково, что $S = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \ldots$ Тогда $x \cdot S = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \ldots \Rightarrow x^2 \cdot S = x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \ldots \Rightarrow S - xS - x^2S = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{1 - x - x^2}$.

Числа - «самородки». Вот все двузначные «самородки»:

20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97.

Примечательные числа. Искомое число должно иметь вид $2^m \times 3^n \cdot 5^p$, где m — наименьшее кратное чисел 3 и 5, n — наименьшее кратное чисел 2 и 5, p — наименьшее кратное чисел 2 и 3. Итак, искомое число $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$. Возможно ли меньшее?

Совершенное число. Взглянув на таблицу совершенных чисел,

По основанию 10	По основанию 2
$V_1 = 6 = 2 \cdot (2^2 - 1)$	$V_1 = 110$
$V_2 = 28 = 2^2 (2^3 - 1)$	$V_2 = 11100$
$V_3 = 496 = 2^4 \cdot (2^5 - 1)$	$V_3 = 111110000$
$V_4 = 8128 = 2^6 (2^7 - 1)$	$V_4 = 1111111000000$

замечаем, что число единиц в двоичной записи совпадает с числом p в десятичной записи совершенного числа $V_n = 2^{p-1} \cdot 2^p - 1)$, а число нулей равно $p - 1$.

В кунсткамере простых чисел. К задаче 1. 1193.

К задаче 2. 11, 17, 71, 37, 73, 79, 97.

К задаче 3. Произведение числа единиц множимого на число единиц множителя больше 10, так как число единиц их произведения простое. Значит, после умножения числа единиц множимого на число единиц множителя могли получиться следующие числа: 12, 13, 15, 17.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & \ast & \ast & 5 \\
 & & & \ast & 3 \\
\hline
 & \ast & \ast & \ast & 5 \\
\ast & \ast & \ast & \ast & \\
\hline
\ast & \ast & \ast & \ast & 5
\end{array}
$$

Из этих чисел только 15 разлагается на простые множители: $15 = 5 \cdot 3$; 5 не может означать число единиц множителя, так как, если будем умножать число десятков множимого на 5 и прибавлять 1 (десяток от первого произведения), то получим в результате число с цифрой 1 или 6 на конце, что недопустимо.

Следовательно, число единиц множимого 5, а множителя 3. Второе произведение (числа десятков множимого на число десятков множителя) может быть равно 12—1, 13—1, 15—1, 17—1, 5—1, 7—1, 22—1, т. е. 11, 12, 14, 16, 4, 6 и 21.

Из них только 6 и 21 разлагаются на простые множители.

Проверка показывает, что число десятков 3 не подходит, а подходит число десятков 7 и т. д. Окончательно: $775 \cdot 33 = 25575$.

Возрастная лесенка. Ответ. (12, 42, 63, 84) и (13, 31, 62, 93).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Борис Анастасьевич Кордемский

УВЛЕЧЬ ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКОЙ

Редактор *Г. С. Уманский*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *М. И. Смирнова*
Корректоры *Л. С. Вайтман, Р. Б. Штутман*

5950

Сдано в набор 20.03.81. Подписано к печати 02.11.81. 60×90¹/₁₆. Бумага газетная. Гарнитура литерат. Печать высокая. Усл. печ. л. 7. Усл. кр. отт. 7,25. Уч.-изд. л. 6,19. Тираж 100.000 экз. Заказ № 4024. Цена 20 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с матриц Саратовского ордена Трудового Красного Знамени полиграфического комбината Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Саратов, ул. Чернышевского, 59, в типографии им. Смирнова Смоленского облуправления издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Смоленск, пр. им. Ю. Гагарина, 2.

20 к.